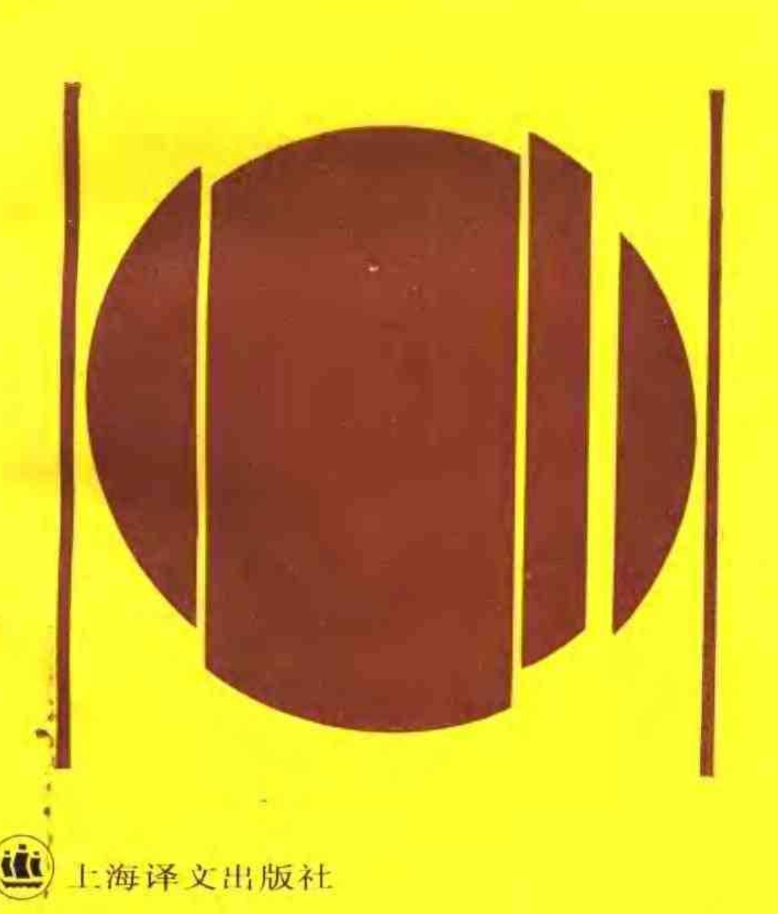
当代学术思潮译丛

混沌经济学

〔美〕理查德·H·戴等著



上海译文出版社

当代学术思潮译丛

混沌经济学

●〔美〕理查德·H·戴等著
●傅　琳等译

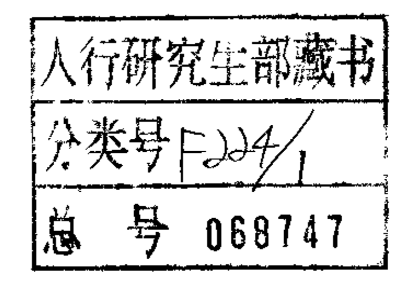
上海译文出版社

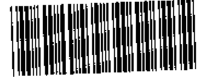
混沌经济学
〔美〕理查德·H·戴等著
傅 琳等译

上海译文出版社出版、发行
上海延安中路955弄14号
全国新华书店经销
上海中华印刷厂印刷

开本850×1168 1/32 印张12.75 插页3 字数269,000
1996年1月第1版 1996年1月第1次印刷
印数：0,001—4,000册
ISBN 7-5327-1365-2/F·035
定价：20.30元

译者的话





一旦混沌“排除了拉普拉斯决定论的可预见性的狂想”，混沌学在经济分析中的应用就取得了令人瞩目的成果。在此之前，传统经济学一直处于两难境地，即经济分析只有排除不确定性才有可能进行，而经济政策只有仔细考虑到变动才有可能实行。但是，由于有了混沌工具，新古典主义的那些决定论方程也可能产生随机过程，从而大大加强了它描述经济行为的能力。看来，这条“保护带”正使新古典主义可以更有效地防御来自证伪的威胁，并鼓励经济学理性主义过分的自高自大。因此，这种进展还是不能令人满意的。

与此同时，我们可以看到另一种不同的研究路线。例如美国南加州大学的理查德·戴教授在本书序言中提出的观点以及邹刚先生建立的描述结构变化的经济增长模型。我们也曾提出一种分析中国消费倾向的逻辑斯谛混沌模型，以期通过参数变化预测消费的结构性转换，从而有可能把时间因素和不

可逆性纳入经济分析的视野。

本书采用论文汇集的形式，其原因是多方面的。迄今为止，我们在国内外的文献中都还没有发现关于混沌经济学的系统的、成熟的专著。同时，"混沌经济学"这一概念也不是没有争议的。当然，"混沌经济学"作为一种发展中的新学科，还是持之有据的。不仅如此，我们从不同流派的学者中挑选不同研究领域的论文，可以使读者从百花中采蜜，更全面地了解这一新学科的进展。如同"混沌是过程的科学"一样，本书也力图反映混沌经济学的发展过程，而不是经济学的一个划时代的结果，至少现在不是。如果读者既能从这一新领域的先驱们不倦的探索中更深刻地领会经济理论和政策的本质，又能获得科学的道路是怎样走过来的知识，我们将感到莫大的鼓励。

本书收录了混沌经济学研究领域有代表性的文章 14 篇，按内容分成四部分：

第一部分主要是论述经济学与混沌学研究的关系。盖伊·劳思回顾了经济学追求科学确定性的历史；戴维·凯尔西对混沌理论与理性预期和商业周期之间的关系进行了探讨；威廉·鲍莫尔和杰斯·贝纳比对经济学中关于混沌研究的综述，则回答了

经济学为什么要研究混沌现象这个问题。

第二部分主要探讨宏观经济问题。米夏埃尔·施蒂策和理查德·戴利用混沌学原理分别对霍韦尔莫增长模型和索洛增长模型做了研究，邹刚的论文则是对戴的研究的质疑与发展。

在第三部分中，不论是威廉·巴尼特和陈平的关于迪维西理论中货币加总量的奇怪吸引子分析，还是乔斯·沙因克曼和布莱克·勒巴龙运用统计物理学方法的尝试，以及詹姆斯·拉姆齐对达芬方程的运用，都是经济学家力图在现实经济数据中找到混沌存在的经验证据的一种有益尝试。

第四部分从不同侧面论述了混沌学应用于其他经济学领域的可能性和局限性。其中包括：威廉·巴尼特和崔胜默关于混沌经济学与计量经济学研究范式的比较；西奥多·戈登和戴维·格林斯潘对混沌研究范式应用于社会、技术预测的探讨；迈克尔·拉齐斯基的制度动力学研究及库尔特·多弗尔对混沌经济学的质疑。

在此，我们诚挚地感谢理查德·戴教授为本书撰写的精彩序言，邹刚先生也对本书的编译提出许多有益的建议和帮助。上海译文出版社的潘龙杰先生、马胜先生在本书的框架设计、选题和译校工作中

始终给予我们多方面的指导和极大的支持。本书的编译是一件探索性的工作，疏漏恐多，译文也说不上信、达、雅，敬请读者赐正，也希望有更多的读者关注和投入这一新学科的开拓。

1992年3月3日

序言

为沈华嵩和傅琳所编译的《混沌经济学》而作

理查德·H·戴

在科学史上，不时发生那种突然改变学者们的思维方式，使之走向新的研究方向的思想上的突破。在本世纪 60 年代初期，斯蒂芬·斯梅尔的纯数学研究和爱德华·洛伦兹的应用数学研究恰恰提供了这样一种突破。庞加莱早在半个世纪以前就预言了他们所使用的这种动态系统分析方法，但由于理论家们在理论和应用科学中将线性数学的作用推至其极限，庞加莱的成果几乎完全被人忘却了。然而，洛伦兹以一种极易为人接受的方式发展了庞加莱的基本思想，它最终促进了不同应用领域的研究，如梅在生物学中的研究。洛伦兹的工作反过来也对李天岩、约克及其他人的纯数学研究提供了帮助。

1978 年 9 月，克莱尔蒙特的数学家肯尼思·库克辨认出，我在说明一个经济增长过程中所使用的二次方程，实际上是洛伦兹使用的二次方程的一个翻版，这唤起了我对洛伦兹论文的注意。几乎与此同时，我的同事杰斯·贝纳比在与西村和夫合作研究最优增长周期的过程中，偶然发现了李天岩和约克的论文《周期 3 意味着混沌》。于是，我们决定探讨混

沌产生于标准经济模型中的可能性。我们立即着手这项研究。我们的成果在 1981 年开始出版。在这项研究的初期阶段，出现了波赫约拉、施蒂策、蒙特鲁奇奥、达纳与马尔格兰奇、格朗蒙特等人的论文。此后，包括在经济学中应用非线性数学的先驱者之一理查德·古德温在内的许多学者都加入到这项研究中来。经过这些努力，现在我们知道：实际上在体现包括非均衡与均衡商业周期、市场调节机制、最优的与适应性的资本积累和增长模型等的自然非线性特征的任何动态经济过程中，作为一种理论上的可能性，混沌、非周期解能够充分地展现。

能解释真实世界状况的这些理论结果的经验证据一直是缺乏说服力的。虽然人们在各种股票市场和宏观经济指数中发现了一些混沌的证据；但这仍不足以毫无疑问地确立这一结论：即现实经济在本质上表现得像具有极少量状态变量的非线性模型一样。这使得一些研究者拒绝接受整个混沌经济学理论，而得出对经济数据的最佳描述应当用自回归、综合自回归移动平均法（ARIMA）、随机过程等方法的结论。

我的观点与此截然不同。经济系统由数以百万计的个体和组织的相互作用所决定，而每一个个体和组织又涉及数以千计的商品和数以万计的生产过程。在我看来，用几个变量就能令人满意地描述这种复杂性的想法似乎是一种空想。但是，这种极为简化的理论在阐明经济数据的基本特征中能够起到一个重要作用，这些经济数据典型地展示出如下显著特征：（1）它们波动；（2）在某些情况中，它们遵循随机过程；（3）它们似乎不断地改变区域，不是处于增长时期就是处于紊乱或衰退时期。所有这些特性都能够从非线性模型中导

出。这就产生了如下一种可能性：即这些方面的现实性都能依内生经济力给出因果关系的解释。如果这一切是确实的话，那么，它将增进我们对经济是如何运行的理解，并减少我们对随机振荡的依赖——以往我们正是用随机振荡来解释为什么经济变量表现出它们所呈现的这种方式。这种努力的成功将为改善政策制定开辟新的途径，对此我们现在只能模糊地加以预测。我希望本书的读者会受到鼓舞而加入到这些激动人心的努力中去。

1991年2月

于美国南加州大学

第一部分

混沌理论与经济学

1 经济学与混沌

盖伊·劳思*

纵观历史，经济学家们孜孜以求的一直是科学的确定性。但是，今天他们开始探索有序外表下的混沌，并且发现了隐藏于无序数据流中的良好结构。

20年前，在坦噶尼喀的达累斯萨拉姆召开了一次会议，讨论在非洲大学中讲授经济学的问题。在这次会议上，各种意识形态，包括古典的和新古典的、正统马克思主义的和新马克思主义的、规范凯恩斯主义的与后凯恩斯主义的、思辨的与制度的、资本主义的与社会主义的，彼此发生了冲突。我与众不同，提出了以下命题，即在经济变量间假设一种确定性关系的任何理论，要么是同义反复，要么是错误的，这倒给一大群好争论的人带来了短暂的统一。

我的解释是，教科书上的那些模型，尽管经过严谨的教授和仔细的检验，但仍是可以变更而未确定的，并缺乏说服力。因为它们遗漏了必要的成分（行为的、历史的、法律的），缺乏

---

* 盖伊·劳思(Guy Routh)，曾任英格兰萨塞克斯大学经济学高级讲师。——译者

这些，模型是无效的，与会者一致反对我的命题，认为这种观点是荒谬的。阿尔弗雷德·马歇尔对类似效果的告诫早已被人们遗忘了。

今天，人们对这种观点会持比较赞同的态度。现在，每一个经济学家都知道托马斯·库恩，或许还有拉卡托斯·伊姆雷，他们的思想虽然还没有最终攻陷传统的堡垒，但毕竟动摇了人们捍卫它的信心。近来，由于改革者手中持有一种工具，即“混沌”的概念，传统经济理论可能更难与之匹敌了。多年来，混沌学一直处于自然科学的范畴。但是，如今詹姆斯·格莱克在他的《混沌——开创新科学》一书中指出了混沌学在自然科学以外的其他学科中也能应用的形式。

库恩和拉卡托斯在研究物理学时设计了似乎能立即应用于经济学的术语——范式、规范科学、难题解答、异常、危机、核心、反面和正面启发法、保护带和研究规划。在自然科学中，新旧范式之间和各种核心之间不断发生冲突，但是，在经济学中存在一个确立已久的范式，虽然面对大量异质的反例，其核心（掺和着隐喻）却处在持久的僵化之中。

这一17世纪建立起来的范式宣称，各种经济变量是可以计量的，因而具有数学和力学领域中的那种确定性和决定性。而那些文字的与历史的反例缺少科学的精确性，用无序和混乱替代了规律与原理。

然而，我们现在发现，无序与混乱并不一定使经济学背离自然科学：对经济学中混沌现象的认识把我们带进当今科学最有启发性的发展之中。下面，我首先考虑经济思想中的断裂，然后是混沌学的本质与术语，最后定义其特征，并提出一个使经济学导入当今研究趋势的规划。

1.1 追求确定性

政治经济学起源于哲学与科学还没有明显区别的时候。弗兰西斯·培根描述了这一过程的三种方式：从自己体内吸取物质的蜘蛛，从外界收集零碎知识的蚂蚁，四处漫游以采集花粉、然后加工转化的蜜蜂。

经济学家同数学家、力学家一样，反对培根关于蜜蜂的说法，而遵循笛卡尔的主张。他们追求确定性，并且像笛卡尔一样声称在他们自己思想的产物中找到了它。结果便出现了对纯理论的偏好，仅限于从内部推导，以及避免与现实世界接触而受到污染。

边际主义者继承了这一传统，以内省的论证进行他们心智的实验，并且出于对科学的偏好，将微分学作为一种担保。W·S·杰文斯在他的《政治经济学理论》一书中解释道："我力图把经济学作为包含快乐和痛苦的一个微积分来看待……这样看待的经济理论表现得与静态力学极其相似，并且可以发现，交换规律类似于杠杆的平衡规律，其平衡点由实际周转率法则决定。"

那些（在思想上）对经济学做了深入探索和卓越攀登的伟人们，期待着把经济量数量化，以使经济学在方法上和权威性上进入物理学和化学之列。不幸的是，这一过程的困难是无法克服的。F·埃奇沃思说："活泼的原子是不易区分和识别的。"点缀在课本中、黑板上的需求和供给函数，边际替代率及曲线族等也是一样。理论思维的产物，依然是不能确定和无法量化的，是形式而非实体。

但是上述信念在没有激烈竞争的情况下延续下来，它受到了名家权威们的庇护，不仅在学校里讲授，课本和杂志也加以刊载和解释。一种信念一经确立，原先的争议可能消失，而信念却留存下来。

有时询问一下那是怎么形成的会有好处。房子看起来很漂亮，但它的地基是否牢固呢？不妨观察一下那些奔走在百老汇大街上的有教养的和没有教养的人们。想想他们是怎样由于追逐各自私利而增进了整体的福利？

早先，教会和政府竭尽全力消除冲突，制止欺诈，宣扬慈善，但是后来有人告诉他们："别管闲事，一切都会好起来的。"据称这就是上帝的意愿。

上帝在17世纪和18世纪的哲学中占了重要的地位。自弗洛伊德之后，内省作为研究人类本性的一种手段一直受到怀疑，但是，当时它作为神灵启示的媒介物而被接受了。你发问，而上帝回答。笛卡尔、莱布尼茨、斯宾诺莎、康德及黑格尔都求诸上帝来填补科学知识的空白。F·魁奈和他的追随者把自由放任的经济思想向有知识的人们进行灌输时，求助的也是上帝。

上帝的启示在整个19世纪一直延续着。1831年，R·惠特利在牛津演讲时说：即使是吝啬鬼也会提供"引人注目的例证，表明按照天意的巧妙安排，不只是自私自利，而且在某些情况下甚至是极其肮脏的利己行为，在社会的高级阶段也会变得有助于公共的繁荣。"杰文斯之后（他赞成惠特利的观点），上帝开始被遗忘了。这是一件憾事，因为，如果货币主义者、供应学派和新古典学派在回答"你是怎么知道的"这一问题时，其答案为"这是上帝的意愿"的话，我们就会知道我们

的处境了。

人们预期经济学的学者们会相信市场力量和竞争的好处。但恰成对照的是，在现实世界中，明智的人却反常地仍对政府机构和反对市场副作用的消费者组织的保护存有好感，这种副作用使我们受到肠炎杆菌、利斯特氏菌和阿耳茨海默氏病毒的感染，热带森林、稀有物种及公共财产也遭到损失。

1.2 自由的思想家们

上帝启示世人的观点仍在留传，不过经济学家们学会将它掩盖在理性主义的幌子下。有时，个人会感知一些反例，但是，它们经过一代又一代人对先辈学说的筛选而被剔除了。

亚当·斯密的“看不见的手”就出现了这种情况，它在书本里经常被错误地引用并被错误地解释。屠夫、酿酒师及面包师出于私利为我们提供了食物，可难道私利就到此为止吗？根本不是。

斯密告诫我们，商人甚至抓住社会上偶然出现的机会从公众身上谋求私利，但利润的差异并不能使商人判断投资的流向，因为商人并非总知道自己将来的利润会怎样，更不用说其他人的了；竞争并不能保证同工同酬，因而工人们拒绝根据工资差异而流动；制造商集团像过于庞大的常备军一样，威胁着立法机构，并指使人对反对者进行无耻的辱骂和人身攻击，有时甚至威胁其生命。

在“天文学史”一文中，斯密预言了现代方法论者的推理。

他告诫说,“学者们放弃了他们感官的体验以保持其想象的种种概念的一致性。”正是这一篇文章,激发了1948年J·熊彼特在美国经济协会上的主席致词(“科学与空论”)。他说,单个的和不连贯的现象向我们的头脑提出了挑战,而它只有从“表象不和谐的混沌”中寻求解脱。

他在致词中作为例证引用了“均衡循环”这一发明。地球被描绘成“自我平衡地悬在宇宙中心,由空气和以太包围着,被8颗发光的水晶般的星球拱卫着……所有这些都围绕共同的中心以不同而又对称的动作旋转”。这种信念在牛顿时代显得荒唐,但斯密警告说,即使是牛顿的理论也必须加以批判性的检验,说不定它们自身到时候也会被替代。

这里对当今经济学家们的一则启示是,他们的一些想法并不见得就不那么荒唐。他们也以自己的想象来构造理论体系,使自己从“表象不和谐的混沌”中解脱出来。他们从“完全竞争”出发,将它运用于“市场”。正如J·S·穆勒所描述的,“他们善于表达自己,好像他们认为竞争在所有情况下都实际在进行那样,而不管可能表现为什么样的倾向。如果我们考虑到只有通过竞争的原则,政治经济学才配得上一门科学所具有的特征,那么,这多少就是可以理解的了。”

经济学家们执着地追求确定性和预见能力,这样他们便可加入科学家的行列。但是,当他们把有序当作经济学的焦点时,他们因此而模糊了经济的主要特点。

不可思议的是,在宣扬神的善意的同时,早期的经济学家却强调人的职责是自己主宰自己。P·布阿吉尔贝尔曾警告说,经济的良好均衡可能会被政府的干预和彼此损人利己的行为所打破。当这种和谐被打破时,货币就会闲置,

股票无法出售。要恢复这种均衡,"就需每个人公平地买卖,公平地作出各自的估算,也就是说利润必须在交易双方之间平分"。

布阿吉尔贝尔(1646—1714 年)和英国的 C·达韦南特(1656—1714 年)都指出这种商业的偏好注定要破灭。达韦南特在他的《关于公共收益的演讲》中,就当今的均衡模型无法说明的信任(或如他所说的"信用")的奥秘写道:"在所有仅存于人类思维内的存在中,没有什么比信用更奇异和美好的了;信用从来不能强制;信用有赖于看法;信用取决于我们的希望和恐惧之情;它经常不期而至,又常常不辞而别;而一旦失去,就很难完全恢复。"

重农主义者也就经济的良好均衡存在着出现混乱的危机提出了警告。魁奈的《经济表》旨在显示经济流量,它们必须连续流动以保持稳定。每一个人,包括地主的妻子在内,也有责任安排好支出,以便收入流量不被打乱。"就世界上的万物而论,滥用是有序的近邻……改变或替换一个数字,会使整个计算陷入无序之中。"

拿破仑战争以后,S·德·西斯蒙第描述了"供大于求",即市场充斥着大量销售不掉的商品。马尔萨斯把这归结于储蓄的过剩,这种提法遭到"萨伊定律"的排斥,结果有声望的经济学家不敢再提它,否则会受到嘲笑。

但正当患特利、F·巴师夏及边际主义者们庆祝他们体系内部的和谐和它固有的均衡特性时,相反的观点也不断出现。年轻的 J·S·穆勒在论及过分的希望和过分的恐惧时写道:这两种失衡的心理状态"交替支配着重商主义大众中多数人的头脑"。只有在短暂的转换期间才呈现均衡。

1.3 “非均衡的支配地位”

J·S·穆勒于1829—1830年完成了他的《论文集》，但1844年才出版。同年，马克思发表了对詹姆斯·穆勒[1]的《政治经济学要义》一书法文版的评论文章。马克思像J·S·穆勒那样看到了非均衡是资本主义经济的支配性特征。在需求与供给之间的均衡只零星和偶然地出现。他认为，“在政治经济学里，规律是由其对立面即无规律来决定的。政治经济学的真正规律是偶然性，从那些偶然性的运动中，我们这些有着科学头脑的人以规律的形式任意孤立了某些因素。”

在19世纪最后25年里，关于范式的争论愈演愈烈。边际主义者宣称他们发现了一个奇妙的世界，而C·莱斯利则写道：“与正统政治经济学假定的那个光明、有序、均等、组织完善的世界相反，商业世界是………一个模糊、混乱、偶然性的世界，这里充满破坏和浪费，决不总是最适者得生存，即使狡诈也算是适应所需的条件。”

过了一个世纪，正统的经济学家陷入困境，60年代似乎起作用的“微调”工具在随后混乱的岁月中失效。预言家们建构的错综复杂的模型投入检验时遭到可悲的失败。在绝望中，政府放弃了凯恩斯而热衷于货币主义的法宝，结果造成了新的苦难。

作为一个有着卓越阅历的理论家，J·希克斯爵士提醒经济学家们注意经济理论的有限范围。他说，“经济问题中更具

---

① J·S·穆勒的父亲，英国哲学家、历史学家和经济学家。——译者

特性的是变革、增长和衰退，以及波动的问题，把这些归纳成科学概念的可能程度是相当有限的；因为在经济过程的每一个阶段中，新的东西总在发生，这些东西是以前从未有过的。我们需要一种理论来帮助我们处理这些问题；不过，无从相信它会成为一种完美的理论。其性质决定了它只能是不完备的……因为经济学不是'静止'的，而是演化的，所以，它不太像科学，而更像历史。"

1.4 "混沌学开始之处……"

科学追求过确定性。当自然界的秘密被揭开面纱之际，在人类可以理解和控制的范围内展示了有序的奇迹。这一过程逐步加快，因为科学家们发展了一种共同的数学符号，并使科学知识在全世界范围内得以交流。

当然，这是一件过去发生的事，在示拿[①]的土地上，当时的科学家想合作建造一座直通天堂的巴别塔，以便直接获得天堂的秘密，但上帝用搅乱语言的简单方法使他们停了下来，因为他们谁也不懂别人在说什么话。

这一次，成功似乎已在人们的掌握之中。P·德·拉普拉斯预言，一个单一的公式可以解释所有的现象并结束不确定性。这是维多利亚时代自鸣得意的基础。现在，是爱因斯坦扰乱了这种共同的语言，因为他将空间和时间连接起来，潜心投入对无限的研究中，并将观察者融合到所观察的事物里。

以后，W·海森堡证明，就是在原子核里不确定性也占主

---

① 示拿（Shinar），《圣经》中地名，古希伯莱人所说的示拿即"巴比仑"。——译者

导地位，从而使粒子的位置和速度也无法确定。让决定论体系更为困惑的发现是，在染色体的结构(对物种有令人惊异的复制作用)中，有时会发生复制错误，以致可能以预料不到的方式改变遗传特征。

信仰自由放任是基于对上帝意愿的信赖。可是，现在我们却被迫承认有些事连上帝也不知道。应该说我们预先已受到过警告，因为早在《创世记》第6章中上帝已经后悔创造了人类，并淹死了大多数人，只留下诺亚一家，上帝(错误地)认为，他们会变得比其他人好些。

我的论点是，经济学家追求确定性，因为它是科学的必备要素之一。在实验室的实验中，面对结果不规则因而是不确定的情况，实验者的结论便是，要么规定有误，要么程序有误，于是必须从头再来，或者放弃假设，另起炉灶。

同样地，计量经济学家们的废纸篓里装满了解不出来的相关性。或许，刊登在学术杂志上论述这些相关性的论文本身就应当被抛弃，而这种无法相关的随机结果正是对此的明显暗示?

格莱克描述了一些诸如此类的事例，它们发生于生理学、生物学、天文学、天气预报、力学与流体动力学、人口统计学、原子物理学及滴水龙头中。“混沌学开始之处，经典科学就终止了。因为自从世界上有物理学家们探索自然规律以来，人们就特别忽略了无序，而它存在于大气中，海洋湍流中，野生动物种群数的涨落中，以及心脏和大脑的振动中。自然界的不规则方面、不连续和不稳定方面，一直是科学的难题；或许更糟些，是无法理解的怪物。”

在70年代，一些科学家开始研究不规则性。“10年之后，

混沌学已经成为一种迅速发展的运动的简称，而这个运动正改变着整个科学建筑的结构。”拒绝服从线性分析的混沌学这种现象的一个令人难以理解的特征是，它在各种领域内采取类似的形式，似乎它遵守许多领域里普遍的规律，并超越人类想象的范围。

格莱克引用了一位不知名的物理学家的话，“相对论排除了对可控测量过程的牛顿迷梦；混沌学则排除了拉普拉斯决定论的可预见性的幻想。”但是，那些在混沌学上流连的人，尽管他们可能来自根本不同的学科，却会突然发现他们有许多共同之处。

1.5 混沌学的特征

按格莱克的观点，流体动力学中的湍流“是各种尺度上的一堆无序，大涡流中套着小涡流。它是不稳定的。它是高度耗散的……所有的成规似乎都被打破。当流动是平滑的，或者叫层流时，小扰动会消失。但是越过湍流起点之后，这些扰动灾难性地增加，这个起点……成了科学上重要的不解之谜”。

在液体或气体中，极小个体的结合可以被视为是无穷的，但是，它们表现出有序的行为方式。“邻近的小块或者保持邻近，或者以光滑、线性的方式互相漂离，造成风洞像片中的整齐的线条。”但是，如果有湍流产生，混乱就出现了，“就像在动物园中动物展示的神秘的狂暴行为”。

L·D·朗道是位俄国科学家，他写了一本流体动力学的标准教科书，描述了竞争性律动的累积：“这些不稳定的运动

简单地积累起来，一个叠加在另一个之上，造成速度和大小都相互交叠的新律动。从概念上讲，这种关于湍流的正统思想似乎与事实相符，那么，即使这个理论在数学上没有用处（确实无用），也只好由它去。”朗道的范式是既认输又保持体面的方式。

1.6 经济学的解放？

要证明混沌无处不在，只要科学家们去寻找就是了。正如格莱克所说：“经济学家像生物学家一样，对付的是一个任性的生物界，经济学家研究的是世界上最难捉摸的生物。”经济学家固执地把自己束缚在线性世界里，在那里，一旦 X 已知，Y 就被确定，并且结果总是遵循合理的因果曲线而产生。但是，如果我们从小穆勒、马克思、莱斯利及现代的 J·希克斯那里寻找线索又会怎样呢？

如果我们在参数值不连续所带来的曲线破缺的条件下，从一开始就假设需求、供给及价格之间的关系是非线性的，并假定养猪周期[①]和蛛网原理并非罕见，它们代表着驱使市场无序的一般动力，那又会怎样呢？价格、需求及供给之间当然是相互影响的（正如 J·凯恩斯所说，每一个小贩都会告诉你是这样），商人也乐于牟取高利，但是产生的系统一点也不像时钟那样有规律，这正是巴师夏所说的而经济计量学家不得不相信的事实。

现在对混沌的研究在科学上是值得重视的，这一事实向

---

① 养猪周期（hog cycle，或 corn hog cycle），指以玉米为主要饲料养猪，使猪的饲养周期随玉米价格的变化而发生显著变化。——译者

经济学家们提出了挑战，也提供了机会。通过参与，我们再也不把自己与自然科学脱离开来，也不再把自己与组成现实世界的物质脱离开来。研究人员的主要作用将是：确认混沌、压力和紧张，穆勒的过分希望和过分恐惧，莱斯利的模糊、混乱和偶然性，希克斯的变革、增长、衰退及波动；而不是寻找根本不存在的均衡。

人们会争论说，大崩溃、萧条、通货膨胀或停滞等作为学生初学经济学的内容未免太难了。但是，学生们在上大学前，从他们第一次得到零用钱去超级市场和第一次假期打工时起，就开始学习经济学了。正是在危机的时代，所有的现象都显得突出了，而在和平安定的时代，这些显著的特征又都模糊了。

1.7 奇怪吸引子

有人会觉得我是在引他们下地狱，把一般均衡和完全竞争变换成令人绝望的混乱。不过，虽然经济是混沌的，可我们并非完全无能为力。D · 茹厄勒和 F · 塔肯斯把那些将无序导入某些潜在中心的属性命名为“奇怪吸引子”。洛伦兹在他对湍流的研究中发现了隐藏在无序的数据流中的良好结构。轨迹从未自相交，因为系统从未被完全重复过。奇怪吸引子有某种使变量趋返的回归线的特征。决定其轨迹的参数，必须具有持久性的要素以增加系统的可预见性。但是，参数是一个变量与常量的中介，其比例的大小可以在计量过程中改变。

模式的改变既有可能是其本身的改变，也有可能是观察者观察角度的改进所带来的结果。采用混沌学以后，习惯的法则就打破了，但是某些约束仍旧适用。正如格莱克解释的

果却都表现出一定的随机性。

众所周知，在最近几年中，人们一直在研究诸如混沌理论这样一些数学问题。混沌学研究的是一系列能够产生非常复杂的、因此看起来几乎完全是随机的运动的方程组。据认为，混沌学既可以应用于对流体力学的研究（天气预报就是以流体力学作为主要的理论基础），也同样适用于研究经济理论。

人们只要观察液体的流动就可以发现流体运动会有多么复杂。假定水顺着一条光滑笔直的渠道流下来，尽管初始条件在时间和空间上都是对称的，但随后这种对称性就不复存在了，水的流动将被看起来具有某些随机特征的一系列漩涡所打破。流体的这种流动被称为湍流。湍流是由流体中的粘性或摩擦引起的。粘性给运动方程引入了非线性项，使之可能产生出复杂的湍流结果。粘性使飞机能够飞行就是一个例子。没有粘性，作用在机翼上下端的压力就会相等，飞机就不会升起来。

正是由于湍流运动的随机特性，人们才推断混沌数学可能被应用于这一领域。同样，也有人认为混沌学也能为经济学所用。本文的目的就是要介绍一下混沌学在经济学中的应用。

本文中的模型是非常简单的。其原因就在于现有研究仅对一维动态系统（即在方程中只有一个因变量，而且方程组的变量只是一阶的）构建了详细的数学理论。对于更高维的系统还没有一般的理论。有人曾就特定的方程提出过一些理论，两个常见的例子就是洛伦兹方程（Guckenheimer and Holmes 1983）和埃侬映射（1976）。人们也曾借助于计算机模拟手段研究过高维系统。这些系统展示了在本文中所讨论

的各种行为和其他类型的复杂行为。迄今为止对高维系统的研究主要是受到把动态系统理论应用到自然科学中的推动。

涉及混沌系统的经济学模型并不总是非常符合现实情况的。正如前面指出的那样，其原因在于我们对此的研究尚处于初级阶段。本文研究的简单模型之所以能引起人们的兴趣有很多原因，但其中最重要的一点是它可以告诉我们某种经济系统所具有的行为。在此以前，人们普遍假定在长期内经济将处于稳定(或平衡增长)的状态，尽管人们也研究周期问题，但却低估了那些已有的、足以证明经济具有周期性的大量经验证据。经济数据具有明显的非周期性，但人们根本就没有考虑非周期运动问题，却把这种非周期性归因于随机振荡在完全静态经济系统上的叠加。经济系统的非线性性质是不可否认的，但人们并未给予足够的重视。我们在此将研究非线性系统行为的某些方面。

2.2 从非线性动态中得出的一些结论

2.2.1 线性差分方程和非线性差分方程

最简单的差分方程是一阶线性差分方程：

$$x_{t+1}=ax_t \tag{2.1}$$

这个方程的解是 $x_t=x_0a^t$。若 $|a|>1$，方程解则呈指数增长。当 $0\leqslant a<1$ 时，方程解则呈单调指数递减并趋近于零。最后，若 $-1<a\leqslant 0$，则方程解以一种振荡的形式呈指数递减并趋向于零。

若 $|a|<1$，则该系统收敛于一个静止状态。当 $a=-1$ 时存在一个倍周期，即对于所有 t 都有 $x_t=x_{t+2}\neq x_{t+1}$。因此，

方程(2.1)存在的唯一周期解是周期为 2 的循环，并且只在参数 a 为单值时才出现。

如果我们从另一方面来分析这些差分方程，假定它们仍是一阶的，但却是非线性的，其情况就大不相同。方程(2.2)和方程(2.1)一样也是一阶差分方程：

$$x_{t+1}=f_r(x_t) \quad \text{这里 } f_r(x)=rx(1-x) \quad 0\leqslant r\leqslant 4 \qquad (2.2)$$

方程(2.2)就是通常所说的逻辑斯谛方程。它是一阶二次方程，因而是非线性的。二次变化是非线性问题中最简单的一种。因此人们可能以为方程(2.2)的变化会像方程(2.1)那样非常简单。但事实上我们将看到方程(2.2)的解是相当复杂的。正如图 2.1 所显示的那样，f_r 有如下特点：$f_r(0)=f_r(1)=0$，且 f_r 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 时达到唯一的最大值。

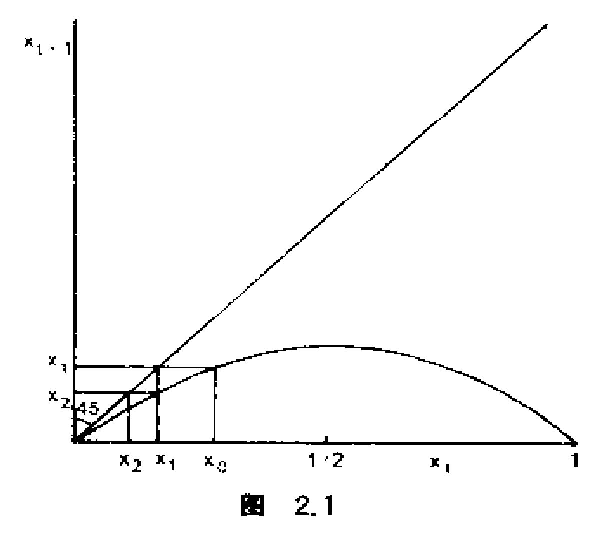


图 2.1

方程(2.2)的静态解是一个序列 $\langle x_t\rangle$，即 $\forall_t$，对 $0\leqslant \bar{x}\leqslant 1$ 上的那些 $\bar{x}$，$x_t=\bar{x}$。在图上静态解为 f_r 的图形与 45°线的交点(例如在图 2.2 上的 Y_r)。显然，对于所有的 r 值而言，零都是一个静态解。

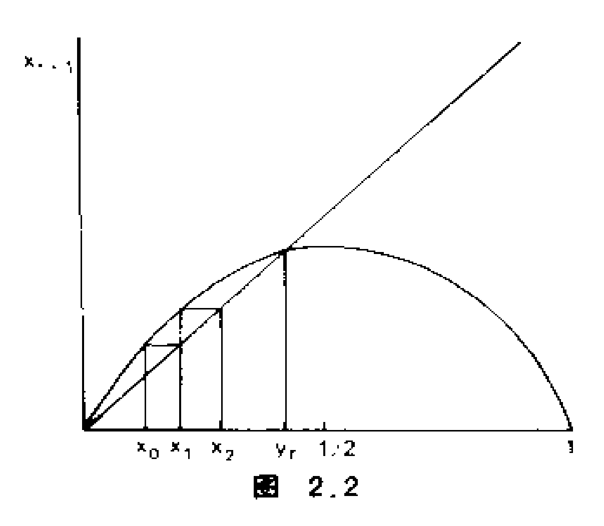


图 2.2

我们也可以把图 2.1 描绘成一个动态系统。假定从 x_0 开始，$f(x_0)=x_1$ 的高度给出了该系统的第二个状态，我们可以经 45° 线的反射找到在水平轴上与 x_1 相对应的点。同理，运用该函数和在 45° 线上的反射我们又可以得到 x_2 系统的下一个状态。这样我们就可以相应找出从该系统演化出的更多的点。由 $x_0, x_1, x_2\cdots$ 等组成的解的轨迹上的一系列的点越来越接近原点。这个过程可以从任意一个点开始。在图 2.1 中原点是唯一的静止状态，它是完全稳定的。

现在我们设想逐渐增加参数 r，我们想看一看这种变化是怎样影响解的特征的。函数 f_r 只有一个峰值。当 r 增大时峰值的高度也在增长。当 r 超过 1 时，图形就变得与图 2.2 一样了。f_r 的图形与45°线交于两点：原点和 $Y_r=\frac{r-1}{r}$。

事实上，当 $1\leqslant r\leqslant 4$ 时，该方程只有这两个静态解。这个动态系统发生了变化。从 x_0 这一点开始，随后 x 的值就不再趋向原点，而收敛于静止点 Y_r。若 $1\leqslant r\leqslant 3$，原点就不再稳定而 Y_r 是稳定的。实际上，从几乎每一个初始值开始，其轨迹都

将收敛于 $Y_r=(r-1)/r$。只有原点和1是例外：原点也是一个静止点，1是对原点这个静止点的映射($f_r(1)=0$)。

因此，若 $0\leqslant r\leqslant 3$，方程(2.2)的解就不像一个线性差分方程的解。对于几乎所有的初始值，该系统都将收敛于一个静止状态。

2.2.2 周期的存在

经济理论研究中的一个主要领域一直是解释呈现周期性的经济现象，特别是商业周期。经济学家对非线性动态感兴趣的原因之一就是周期解非常普遍。在解释商业周期的理论中，非线性动态很可能是有用的。

一个 k-周期是由 $x_1, x_2\cdots x_k$ 等 k 个不同点构成的一个集合。对于所有 $1\leqslant i<k-1$ 的 i 都有：$f_r(x_i)=x_{i+1}$ 且 $f_r(x_k)=x_1$。当 $r>3$ 时，逻辑斯谛方程(2.2)存在周期解。与线性差分方程(2.1)不同的是这里可以具有很多含不同周期数的周期。

萨尔柯夫斯基定理对解释非线性差分方程周期解的结构很有启发性。描述在何种情况下我们可以得到不同时间长度并存的周期，这一结果是非常迷人的。我们定义正整数的萨尔柯夫斯基次序<如下：

$$
\begin{aligned}
&1<2<4\cdots<2^k<2^{k+1}< \\
&\cdots<2^{k+1}(2m+1)<2^{k+1}(2m-1)< \\
&\cdots<2^{k+1}\cdot 5<2^{k+1}\cdot 3< \\
&\cdots 2^k(2m+1)<2^k(2m-1)<\cdots<2^k\cdot 5<2^k\cdot 3< \\
&\cdots 2(2m+1)<2(2m-1)<\cdots<2\cdot 5<2\cdot 3< \\
&\cdots(2m+1)<(2m-1)<\cdots<5<3
\end{aligned}
$$

即最大的是大于3的奇数，然后是用这些奇数乘2的幂，再往后是2的幂。

萨尔柯夫斯基定理：若f在一个区间内是连续的，且自身具有一个p-周期，则在萨尔柯夫斯基次序中，如果$q<p$，则f也包含一个q-周期。

由此可以清楚地看到，一阶非线性差分方程比相应的一阶线性差分方程具有多得多的周期解。考虑一个m阶线性差分方程：

$$a_m x_{t+m}+a_{m-1}x_{t+m-1}+\cdots+a_1 x_t=f(t) \qquad (2.3)$$

这并不比解方程(2.1)更复杂。唯一新出现的困难只是它可能具有多重根或复根[①]。复根就可能产生周期解。但即使是方程(2.3)的解也没有非线性方程的解复杂。在m阶线性方程中只可能存在有限数目的周期解。从萨尔柯夫斯基定理中可以看出，在非线性情况下，即使是一阶差分方程也会得到无穷多个周期数不同的周期解。无疑，它也存在一个周期数为奇数的周期。

2.2.3 周期的稳定性

根据萨尔柯夫斯基定理，逻辑斯谛方程有很多周期解。因而这个周期集合看来是非常复杂的。实际上不稳定的解是观察不到的。幸运的是稳定的周期集合要简单得多。如果满足适当的凸状条件[②]，至多会有一个稳定的周期，并且从任何

---

① 在许多文献中都可以找到有关这类方程的理论解释，对经济学家来说，一个较好的参考文献是萨金特1979年的著作。

② 这里的含义是：如果f_r是可微的或f_r虽不可微但能满足交比的性质，则f_r就应该具有负的施瓦茨导数。具体内容可参见普雷斯顿的著作(1983)。这个结果最初是由辛格证明的(1978)。

一点出发的轨迹都将收敛于这个稳定的周期。因此，对于存在一个稳定周期的那些参数值，在长时期中，这个周期就是我们所观察到的一切。但是，这并不意味着将存在一个稳定的周期。

对于 f_r，令 Y_r 为一个不动点(静态均衡)。Y_r 稳定的充要条件就是 f_r 在 Y_r 时的导数的绝对值要小于1，即 $\left|\frac{df_r}{dx_0}\right|<1$。这意味着在 Y_r 的邻域，f_r 的映像长度会缩短。

当 r 的值增加时，f_r 的峰值就会升高。这里出现一个效应：不动点 Y_r 逐渐从峰值滑下，进到一个斜率更大的区域。因而这个不动点就变得不稳定了。这种情况在图 2.3 中得到说明(在图 2.3 中，$r_2>r_1$)。类似的分析也可以应用于对周期的研究。如果 $x_1, x_2\cdots x_k$ 是一个 k-周期，则在 $1\leqslant i\leqslant k$ 内，x_i 是 f^k 的一个不动点(这里 f^k 表示 f 自身叠代 k 次，如 $f^2(x)=f(f(x))$。在这个周期的某一点上，如果 f^k 的导数绝对值小于 1，则 k-周期就是稳定的。根据链式法则：

$$\frac{df_r^k}{dx}(x_1)=\frac{df_r}{dx}(x_1)\cdot\frac{df_r}{dx}(x_2)\cdot\frac{df_r}{dx}(x_3)\cdots\frac{df_r}{dx}(x_k) \quad (2.4)$$

所以，周期中任意一点导数的绝对值都是相等的。因此，我们关于稳定性的定义不依赖于这个点在周期中的位置。在 f_r 的最大值 x^* 上的导数值为零，结果方程(2.4)也为零。我们有一个简单的命题，即任何包含 f_r 最大值的周期都将是稳定的。事实上对于任何一个周期而言，当 r 增长时，在周期上总有一个 x^* 与 r 值相对应。所以，对于某些 r 值而言，周期将是稳定的。根据连续性原理，在 r 值的邻域周期也是稳定的。因此对于任何一个 k 而言，都存在一个 r 值的区间相应都存

在一个稳定的 k-周期。

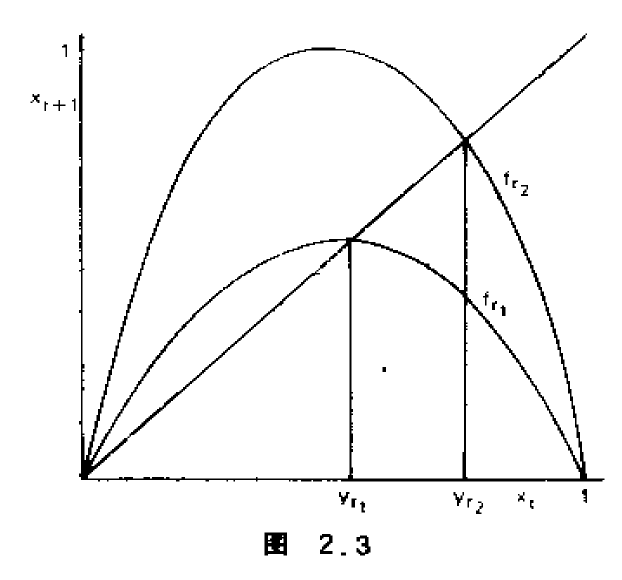


图 2.3

现在我们就将研究为什么当参数 r 增长时，逻辑斯谛方程(2.2)的稳定解的集合将发生变化。正如我们已经提到的，对于任何一个给定的 r 值来说，最多有一个周期是稳定的。然而当 r 值增长时，稳定的周期也将发生变化。对于 $0 \leqslant r \leqslant 1$ 而言，原点上的静态解是稳定的(静态解是周期数为 1 的周期)。如果 $1 \leqslant r \leqslant 3$，静态解 $Y_r = (r-1)/r$ 是稳定的。把 $x_t = (r-1)/r$ 代入方程(2.2)，对于 $1 \leqslant r \leqslant 4$ 中的所有 r，Y_r 总是 f_r 的不动点。但当 $r=3$ 时，该体系会经历一次分岔，也就是解集合的结构出现变化。在 $r=3$ 以后，Y_r 就不再稳定，不过却有一个稳定的 2-周期。在这个区域内，任意给定一个初始值，该体系最终都将落入一个周期数为 2 的周期中。

图 2.4 以高度简化的形式表现了当参数值 r 变化时方程(2.2)的稳定解集结构的变化。在一个较高的 r 值上所发生的情况实质上就是重复当 $r=3$ 时的行为。2-周期变得不稳定时，一个稳定的 4-周期出现了。我们把这个过程叫做倍周

典型的。

在此可以看到的稳定的3-周期的 r 值小的情况下，该体系是混沌的(参见 2.4 节对混沌的描述)。当 r 接近相应出现 3-周期的参数值时，会出现间歇性混沌。此时，该系统实际是在类似 3-周期与混沌行为之间进行选择。据认为在流体的湍流运动出现时，间歇性混沌是十分重要的。随后当 r 增长时，一个稳定的 3-周期出现了。与不动点的情况相似，这个 3-周期将经历一系列倍周期分岔，它被一系列周期数为 6, 12, 24, …, $2^n \cdot 3$, …的稳定周期所取代。这些分岔积累到一个极限点以后，其行为就又与 r_∞ 点上的行为类似了(倍周期的这个极限点 r_∞ 是一系列 2-周期的结果)。过了这个极限点，该系统就回到了混沌行为。从 3-周期开始到这一分岔系列的极限点之间的 r 值集合就是人们常说的倍周期窗口。

在理论上，$r=3$ 和 $r=4$ 之间存在的倍周期窗口包括了各种可能长度的周期。显然，多数的这些倍周期窗口在参数空间中占据了一个非常小的区间。在数字模拟中，唯一可以看到的倍周期窗口是从那些周期数较短(如 3, 5, 7)的周期开始的。

2.2.4 混沌

让我们分析一下当 $r=4$ 时的逻辑斯谛方程(2.2)。在这种情况下可以找到一个解析解。代人 $x_0=\frac{1}{2}(1-\cos(u))$ (与以前一样，x_0 是 x 的初始值)。利用一些简单的代数和三角函数公式，人们就可以得到方程的解：$x_t=\frac{1}{2}(1-\cos(2^t u))$。

如果 $u/2\pi$ 是有理数，则这个解就是周期性的。通过选择适当的 u 值，又可以得到任何期望长度的周期。如果 $u/2\pi$ 是无理数，则这个解就是非周期性的。

另外，这种运动还有一个特征就是对初始条件的敏感依赖。假定 $x_0=\frac{1}{2}(1-\cos(u))$，$y_0=\frac{1}{2}(1-\cos(u+\varepsilon))$，则从初始值 x_0、y_0 开始的方程(2.2)的解就分别是 $x_t=\frac{1}{2}(1-\cos(2^t u))$ 和 $y_t=\frac{1}{2}(1-\cos(2^t\varepsilon+2^t u))$。$2^t\varepsilon$ 这一项数值很快变得非常大。因此不论 ε 值有多么小，x_t 和 y_t 都将迅速离散(但离散的时间一般取决于 ε)。

尽管差分方程(2.2)是完全决定论的，但该系统的行为看来却是随机的。如果对它进行实际观察就会包含误差，包括初始测量误差和计算中的舍人误差。由于对初始条件的敏感依赖，这些误差将变得非常重要，并且导致在用该体系进行预测时出现重大的、无法事先估计的差错。正是这种行为被称作混沌。由于很多人把混沌说成是这种系统的结构，因此人们对混沌这个词可能有些误解。实际上，在这种情况下我们对这个解有一个明确的解析公式。

我们已经给出了 $r=4$ 时的行为，在 $r=\infty$ 和 $r=4$ 之间该体系所发生的变化是非常复杂的。对于一个具有正测度的 r 值集合而言，该系统的行为是混沌的[1](这有点像在 $r=4$ 时出现的情况)。对于其他 r 值，周期也是可以被观测到的，那些产生周期的参数值的集合也具有正测度。

至此我们已经分析了由一个特定的函数族(f_r)所产生的动态系统的解。根据数学理论提出的一个更惊人的结论是，

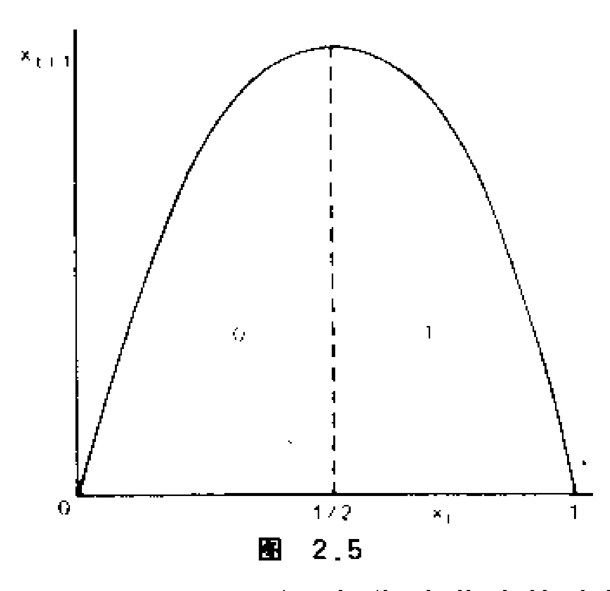


图 2.5

让我们分析一下 $r=4$ 时逻辑斯谛曲线的映像(如图 2.5 所示)。单位区间可以分为两个区域：区域 $0=\left\{x: 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right\}$和区域 $1\left\{x: \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\right\}$。除了终点之外，这两个区域都映射在全部区间上。因而其长度基本上按这两个区间中适用于该映射的那个区间的影响而扩展。这个扩展和再注人的过程有点像连续抽牌和洗牌的过程。照此看来，这个系统的动态具有不可预测的特性就毫不奇怪了。

在这方面，李天岩和约克在 1975 年的论文中提出了一个有趣的结论：如果存在一个长度为 3 的周期就会出现“混沌”。李和约克认为混沌意味着存在一个具有所有周期的周期性轨道(这其实是我们在 2.2.2 节中讨论的萨尔柯夫斯基定理的一个推论)。同样，也存在一个初始值的不可数的 S 集合，它们都具有非周期的轨迹。进而，如果 x、y 属于 S，则 x 和 y 的轨道会无数次地随机聚合又分开。它可以正式表达为：

$$\lim_{n\to\infty}\sup|f^n(x)-f^n(y)|>0 \quad \lim_{n\to\infty}\inf|f^n(x)-f^n(y)|=0$$

其实这就是说，在 S 内我们具有对初始条件的敏感依赖。最后，如果 z 是一个周期点，x 在 S 内，则有：

$$\lim_{n\to\infty}\sup|f^n(x)-f^n(z)|>0$$

它说明 x 的路径将偏离任何周期性轨道。

李和约克的结论有一个长处，就是它可以非常方便地检验出存在一个 3-周期的充分条件是否得到满足。许多关于经济学中的混沌的文章都使用了李和约克的结论来说明一些经济变量可能会遵循一个游荡的路径。有关例子请参见贝纳比和戴(1981, 1982)以及戴(1982, 1983)的文章。

近来这些论文受到了攻击，例如可参见格朗蒙特(1985)以及梅勒什和特兰苏(1986)的文章。随后也出现了对应用李和约克的结论进行分析的做法的批评。虽然李和约克的结论是真实的，但它不能排除存在稳定的 3-周期(或其他数目的周期)的可能性。而且对于一般的一个初始值来说，其运动也可能最终收敛这个周期。这种情况与李和约克的结论不矛盾的原因在于，一个不可数的集合可能具有勒贝格零测度。因此前面提到的 S 集合可能具有零测度，因而实际上根本观察不到。对于一个逻辑斯谛映象而言，更有用的一个混沌指标是所有周期都不稳定。雅各布森(1981)指出，如果参数值的集合是不可忽略的，这后一种意义上的混沌就会出现。

在某些情况下微分方程的行为与差分方程的行为有所不同。在这一节中我们已经看到，具有相当简单的非线性的一维差分方程的解可能相当复杂。这对一个一维系统的微分方

质上几乎肯定是混沌的。就经济学而言，它们在我们的方程中就表现为随机项。进而言之，当我们仅就经济生活的某一部分建模时，我们就必须包括进一个随机项以便反映其他经济部门中的随机过程。

当我们看到在纯经济系统的方程中随机项是不可避免的以后，就要进一步观察每种随机影响的结果。假如我们给逻辑斯谛方程(2.2)加入一个随机误差项，则有两种方式可以做到这一点。我们可以考虑一种附加随机误差项的形式：

$$x_{t+1}=f_r(x_t)+\varepsilon_t=rx_t(1-x_t)+\varepsilon_t \tag{2.5}$$

我们也可以考察参数 r 本身受到随机扰动的情况：

$$x_{t+1}=f_{r+n_t}(x_t)=(r+n_t)x_t(1-x_t) \tag{2.6}$$

这里 ε_t 和 n_t 是具有零平均值的随机变量。令人吃惊的是，(2.5)和(2.6)两个系统的行为很可能是相似的。克拉奇菲尔德、法默和休伯曼解释说，两个系统事实上是等价的。而且，当误差项 ε_t 和 n_t 的分布发生变化时，两个系统的行为几乎不发生变化。在所有情况下，该系统在 r 点上的行为是它在邻近各个 r 数值上决定论系统行为的混和。

在克拉奇菲尔德等人(1982)的文献中研究了这类系统。当方程(2.5)遵从某一个稳定的周期时，人们可以预期由于噪声项的作用，该周期会被扰动。因而，这个周期轨道将由宽带而不是由一系列的点构成。混沌行为变得更常见了。既然这个系统遵从邻近参数值上行为的混和结果，当按混沌的吸引子进行平均时，许多周期性轨道就消失了。例如，如果噪声足够大，则该系统就将出现一个稳动的不动点，随后就是 2-周期，再以后是 4-周期，然后直接过渡到混沌，从而就不再出现整个倍周期序列了。只要加入一个复杂的因素，就不再有明

显的分岔点，它们变成了某些模糊不清的东西。

这种情况与流体运动试验中所观察到的现象是一致的。在这些过程中，在湍流发生以前只能看到有限的倍周期分岔，其数目一般很小，通常小于6。图2.6显示了计算机模拟这一过程的结果。

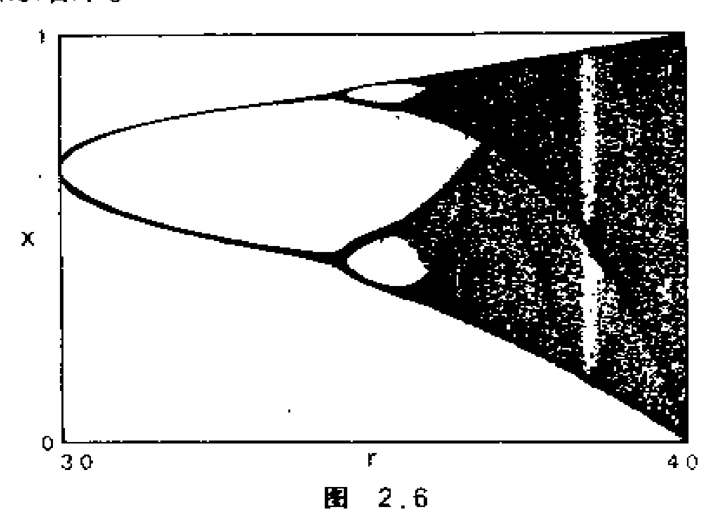


图 2.6

把这个系统与没有随机误差的系统相比较，在方程(2.5)中当 r 参数值较低时将出现混沌。它遵从这样一个事实，即在一个噪声系统中，系统行为实际上是邻域参数值行为的混合体。当噪声程度增加时，其行为就是更大邻域内行为平均的结果。因此，一系列较低 r 值平均的结果就是混沌的轨道。

在混沌区域内，随机误差的存在消除了大部分周期窗口。在数值实验中，只能看到3-周期的轨道。一个有意思的现象是，噪声对3-周期轨道的影响不同于它对4-周期轨道的影响。在决定论的情况中，周期4轨道的概率密度是由4个点群构成的。由于存在随机误差，它扩展为四条带，它们中间本质上是零密度的点。在周期3的轨道中同样有3条点群形成的带，一个广泛的背景填充在这些峰值之间。随着噪声的加

态系统理论的其他应用。

先分析每一代都有两个周期的叠代模型(overlapping generations model)。我们将考察一个只有一种消费品和一种不兑现纸币的纯分配经济。因此,我们只需要分析每一代中具有代表性的成员。假定这个具有代表性的消费者具有一个附加的可分效用函数:

$$u(c_1, c_2) = v_1(c_1) + v_2(c_2)$$

虽然我们的大多数结论对较一般的 v 函数是正确的,我们仍假定 v_1 和 v_2 有如下特定的形式:

$$v_1(c_1) = \ln(c_1) \qquad v_2(c_2) = \frac{c_2^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

这里,c_1 和 c_2 分别代表第一期和第二期的消费,α 是参数。假定消费者在这两期内有正的消费能力 e_1, e_2,他的效用最大化目标必然受到预算的约束:

$$p_1c_1 + m_1 = p_1e_1 \qquad p_2c_2 = m_1 + p_2e_2 \tag{3.1}$$

这里 m_1 是消费者从第一期到第二期持有的货币余额。消费品不能贮藏。因此,消费者只能通过持有货币才能把一个时期的消费转到另一时期。还有一种可能存在的情况是,消费者只是简单地在各期中消费他们的所得,而不进行交易或持有货币。这种可能性通常被称为**自给自足的均衡**。我们这里假定不存在这种情况。在所有的均衡中,我们分析的是消费者持有正的货币余额(从技术上讲,通过适当选择消费能力就能实现这一点)的情况。

通过分析约束条件(3.1),我们可以看到消费者在两个时期内的消费仅取决于 $Q=\frac{p_1}{p_2}$。即需求是两期价格的零次齐

次函数。这里，p_2 是对第二期的预期价格。在这个例子中我们假定存在完全的预见（这与决定论模型中的理性预期是一样的）。人们对第二期的预期价格就是那个时期实际的均衡价格。这样我们就可以写出典型的消费者超额需求 $z_1(\theta)$ 和 $z_2(\theta)$

$$其中\ z_i(\theta)=c_i(\theta)-e_i \qquad i=1,2$$

现在我们考虑一个市场出清价格的无穷序列，同时也相应给出了一个相对价格序列(θ_t)。消费者预算约束要求：

$$\theta_t z_1(\theta_t)+z_2(\theta_t)=0 \tag{3.2}$$

对消费者而言，效用最大化的一阶条件是：

$$\frac{v_1'(c_1(\theta_t))}{v_2'(c_2(\theta_t))}=\frac{p_t}{p_{t+1}}=\theta_t \tag{3.3}$$

把(3.3)代入(3.2)，我们就可以得到：

$$\frac{v_1'(e_1+z_1(\theta_t))}{v_2'(e_2+z_2(\theta_t))}z_1(\theta_t)=-z_2(\theta_t) \tag{3.4}$$

我们也可以得到市场均衡的条件：

$$z_1(\theta_t)+z_2(\theta_{t-1})=0 \tag{3.5}$$

由此，(3.4)可以改写为：

$$v_1'(e_1-z_2(\theta_{t-1}))z_2(\theta_{t-1})=v_2'(e_2+z_2(\theta_t))z_2(\theta_t) \tag{3.6}$$

令 $\mu_t=z_2(\theta_{t-1})$。μ_t 是最便于分析的一个变量。我们可以把 μ_t 解释成具有代表性的消费者所持有的实际余额水平。如果把 μ 代入(3.6)，我们就可以得到：

$$v_1'(e_1-\mu_t)\mu_t=v_2'(e_2+\mu_{t+1})\mu_{t+1} \tag{3.7}$$

这暗含着把 μ 定义为一个非线性差分方程。如果我们令 $u_1(\mu)=\mu v_1'(e_1-\mu)$ 和 $u_2(\mu)=\mu v_2'(e_2+\mu)$，则(3.7)就可变成：

$$\mu_t=u_1^{-1}\circ u_2(\mu_{t+1}) \tag{3.8}$$

（如果 f 和 g 是函数，f。$g(x)=f(g(x)$。）令 $\chi=u_1^{-1}\circ u_2$，则我们的基本差分方程就变为：

$$\mu_t=\chi(\mu_{t+1}) \tag{3.9}$$

对于这个模型我们要问的第一个问题是：什么是稳定状态？下面的引理给出了答案：

引理 3.1　稳定状态只能是固定价格 $\theta=1$ 或者是非贸易（自给自足）均衡 $\theta=0$。

（证明从略）

因此，我们建立的叠代模型不仅能产生周期行为，而且也能产生混沌行为。在我看来，它告诉我们非线性动态可能是我们在宏观经济数据中看到不规则周期的原因。不应当过分看重这个模型的特殊结构。例如，每一代的平均寿命大约是 25 年。如果我们把这些代非常仔细地划分出阶段，则这个模型所产生的最短周期大约为 50 年，这使它成为类似康德拉捷夫周期的一种形式。但是，我们对解释就业和产出的短期波动更有兴趣。格朗蒙特进一步认为，可能有一种反周期政策，它可以平抑他所发现的那些波动。的确，可能有一种政策能够平抑康德拉捷夫周期，但它与通常所说的反周期政策不是一回事。

2.3.2　涉及混沌的其他经济学模型

下面我们对一些能产生混沌行为的其他经济学模型作一个总括分析。多数这些模型是以我们在第二节中考察过的一维差分方程理论为基础的。所以，尽管这些论文对经济理论的不同领域做出了重要贡献，但它们在数学方面是非常相似的。

戴(1983)曾分析过标准的经济增长。它是一个典型的马尔萨斯模型，其产出水平决定了人口增长率。反过来，产出又取决于劳动力的规模。这两种效应的相互作用就可能产生周期或混沌。

贝纳比和戴(1981)分析了消费者的选择。在这个模型中，实际消费会影响未来时期的偏好(例如通过上瘾)。他们得到了一个有趣的结论，即财富的增长可以使动态系统变得更复杂。因此，一个穷消费者的选择可能是相当稳定的，而一个富消费者的选择就可能是周期性的或混沌的。盖特纳(1984,1986)分析过一个类似的模型。然而在他的理论中，非线性现象之所以出现不仅是因为现在的选择影响未来的偏好，而且也是由于个人的偏好还会受到社会上其他人选择的影响。

消费者理论中存在一个问题。如果一个妇女今天吃猪肉而明天吃牛肉，这似乎没有不合理之处，但是这种情况却很难包容在一个常规的消费者理论的模型中。如果价格不是每天变化，则这个妇女的行为看来就违背了显示偏好的公理。这可以解释为偏好的变化。由于消费者理论应该能在一个框架内解释所有的选择，因此这种观点是不能令人满意的。用不同的偏好来解释对牛肉和猪肉的选择就不能做到这一点。

第二种方法是建立这样一个模型，在这个模型中消费者将在某一时期对一个长期内(比如一个月)的全部消费进行选择。于是，既消费了猪肉又消费了牛肉，而不是仅仅消费了猪肉这一事实可以用效用函数的凹性来解释。这种方法的一个不足之处在于，某些商品在一年内只消费一次，例如假日。因而我们基本的时间区间至少是一年。但是我们能保证偏好在

如此长的一段时间内保持不变吗?[1]

贝纳比和戴的模型给出了第三种解释。对猪肉和牛肉的交替选择是一个动态系统的周期解，它是由下述假定推导出来的，即今天的实际消费会影响明天的偏好。在贝纳比和戴的理论框架中，最好把偏好局限在一个很短的期间内。例如，通过假定偏好只决定一天的消费行为可以解释对猪肉和牛肉的交替选择。因而今天消费猪肉实际上引起了消费者偏好的改变，因而第二天对猪肉效用的评价就比牛肉低。"我不能连续两天看到猪肉。"

贝纳比和戴放弃了稳定的偏好，在他们的分析中，偏好代之以一种稳定的方式发生变化。这种方法的一个不足之处就是这种偏好概念非常难以使用，并且很难应用于实际数据。同样，分析有多种偏好的消费者可不是一件轻松的事。

人们可能会问，随着某些参数值的变化，混沌能否出现?答案是不确定的。格朗蒙特报道了计算机对与本节所述相类似的叠代模型的模拟结果。只有当相对风险规避(α)在消费者生命的第一个和最后一个时期中从$\frac{1}{2}$提高到4，周期才可能出现。相对风险规避在消费者生命的第二个时期中必须是8，混沌才能出现。这些都反映了个人行为的显著变化，而且我们很难相信它们是现实的。类似的情况出现于戴(1983)的经济增长模型：混沌的行为能否出现取决于函数中联系本期人口与下期人口一个相当陡的峰。既然我们很难说这种关系是非线性的，因此也就难以断定函数曲线是否尖锐到

① 森(1979)的文章也讨论了这个问题。

能产生混沌。有关的批评来自兰德(1978)的双头垄断模型。兰德所假设的反应函数的形状事实上是非常极端的,看来它们不能由合理的需求和成本函数导出。在物理学中也有类似的问题。洛伦兹方程是有关气象的一个简单方程,它们能够产生混沌;但是人们也争辩说,这些导致混沌的参数值不可能产生。

蒙特鲁奇奥(1984)和博尔德林(1985,1986)曾讨论了最优增长路径可能是混沌的环境。这与该领域的大多数经济学文章不同,后者指出协调的系统不会造成混沌。特别应该指出的是,叠代模型的行为即使在帕累托意义上也不一定是最优的。所以,协调系统会产生混沌行为也就不足为奇了。最优行为是混沌的这一发现在某种意义上很令人头痛。既然遵从混沌的路线是困难的,在这样的环境中实际行为就不可避免地成为次优的了。西蒙(1979)曾指出,由于计算最优战略的困难,经济活动主体不是以一种最优方式活动,而是用追求满意的结果代替最优目标。这类行为就是所谓有界合理性。最优行为可能是混沌的论点有力地支持了西蒙的观点。既然遵从一条混沌的路径有巨大的困难,经济活动主体就可能选择次优的、但不那么复杂的战略。

2.4 混沌和理性预期

许多经济学变量的时间序列具有一种嘈杂周期的外观。对此的传统解释是经济受到了随机冲击。这些随机冲击可能是由气候、地震或任何类似的能影响经济活动的外生现象引起的。这种观点的典型代表就是卢卡斯(1975)的理论。

卢卡斯的宏观经济模型是以一系列具有随机误差项的线

性差分方程为基础的。经济被细分成一个个的“岛”。信息在不同岛屿之间的流动是不完全的。因此当看到价格上涨时，人们并不知道是否仅是他们所处的这个岛价格上涨了，或者他们看到的是整个价格水平的上涨。所以，纯粹名义上的冲击所引起的价格上涨即使没有造成实际的赢利机会，也会诱使人们投资。就是在名义冲击消失以后，这些投资也会保存下来。结果，实际效应在名义冲击过后的一段时间内仍会被感受到。(类似地，导致价格水平下降的冲击的效应仍要持续一段时间。)

卢卡斯特别指出，他的模型能够在价格和投资的相应产出份额上产生类似周期(pro-cyclical)的运动。他的这一论点可能是对宏观经济数据中的自相关的一个解释。卢卡斯进一步指出，当经济生活受到一系列随机冲击时，它会表现出一种类似于真实商业周期的行为方式。[关于商业周期理论的概貌参见扎诺维茨(1985)。]

关于商业周期问题，另一种可供选择的解释是使用包含非线性差分(或微分)方程的模型。如果这种模型显示出混沌的或周期的行为，则它就可以为商业周期提供一种解释。这种方法有不依赖于外部随机冲击的好处。[1]它与卢卡斯理论的第二个区别在于，即使经济活动主体具有理性预期，货币政策也可能依旧有效。政策失效的结论主要来自于经济关系是对数线性的假设。格朗蒙特(1985)指出，货币政策在其叠代模型中可以相当有效。斯诺尔(1984)也指出非线性关系可以

---

[1] 或许应该指出，经济周期也可以被描述为“太阳黑子均衡”。在这种情况下，由于人们把他们的预期置于马尔可夫过程(这并不直接对经济产生影响)，因而会造成波动。由于2-周期的存在意味着存在一个太阳黑子均衡，所以这种方法是与非线性动态联系在一起的。

非线性动态有一个优点，即对商业周期给出一个纯经济的解释，不再依赖一个未被解释的外部冲击。卢卡斯(1975)指出：

> 在本文所讨论的所有模型中，实际产出的波动都是由意外的货币—财政冲击所引起的。理论的首要任务——实际上即宏观经济学的核心理论问题——就是要寻找一种解析性的框架，在这个框架中会发生上述波动，但同时并不意味着存在持续的、不断发生的、未被利用的赢利机会。第二节阐述了一个新古典的货币增长模型，旨在说明这些问题为什么在认为贸易是在单一的和集中的市场上发生的这样一类总量模型中无法得到解决。尽管给分析带来了便利，但这种抽象的环境给交易者提供了过多信息，以致使周期性行为与理性难以达到一致。

在我们使用非线性模型时，卢卡斯的结论必须作很大的修正。在本文3.1节我们提到的商业周期理论中，实际上在具有理性预期的单一的集中市场上每期都有交易发生。尽管如此，卢卡斯把经济生活设置在不同“岛”上的模型看起来是非常武断和不现实的。必须承认，经济中的信息流动是不完全的，经济中某些部分的运行相对于其他部分或多或少是独立的。而且，对基本经济关系的线性假定也大可置疑。总之，混沌经济模型可以解释宏观经济数据既显得无规则又包含周期性这个事实。由于避免了某些相当特殊的假定，它们比卢卡斯模型(1975)更有优势。

> 并用其估算结果来预测收益，则价格和收益的随机过程就既不是静态的，也不再是彼此独立的了。此时，使用普通最小平方法来预测就不太合适了。

尽管存在这些错误的规范，布雷还是指出，在某些简单的例子中，使用普通最小平方法可以导致该系统收敛于理性预期均衡。

在混沌模型中，所有这些问题依然存在。混沌还引起了另一些问题：即使人们完全了解函数关系，测量和计算中的误差最终也会使预测失准。传统上，在决定论模型中，理性预期被假定为具有完全的预见性。在混沌模型中，如果均衡的路径是混沌的，就无法坚持这种观点了。完全的预见性必须依赖于经济活动主体对其环境的观察和学习，在非周期运动的环境中，他们观察不到规律性。进而，如果他们了解了对初始条件的敏感依赖，他们就会认识到除了很近的未来之外，不可能对任何事情作出预测。

如果这些经济参数会使系统形成周期，则情况就不同了。在这种环境中存在规律性，因而经济活动主体就有可能学会预测均衡变量的路径。格朗蒙特(1985)实际上建构了一个学习过程的模型并表明该系统能够收敛于长期的理性预期(完全预见)行为。应当一提的是，这个结论只适用于3.1节中讨论的叠代模型。然而这确是个十分有趣的结果，并说明对于更一般的系统也能产生类似的结论。

不变测度

如上所述，在一个混沌动态模型中，完全预见不是形成理

性预期的一条好途径。没有人能够提出一种个人在混沌经济中获得完全预见能力的学习过程[格朗蒙特(1985)提出的学习过程只显示出它将在一个周期领域内收敛于完全预见]。事实上，存在这种学习过程的可能性很小。

幸运的是，存在形成理性预期的另一条可供选择的道路。在某些情况下，有可能找到对非周期运动的统计描述。假定f映射一段区间于其自身，因而有时在经过大量叠代之后，就有可能找到一个概率分布(或测度)，来描述该系统取某特定数值的可能性。令 μ 代表这个区间的一个测度。为了描述 f 的运动，μ 必须是不变的、遍历的。

如果对所有确定 μ 的A 集合都有 $\mu(f^{-1}(A))=\mu(A)$，则从属于f的 μ 的分布被认为是不变的。这就是说 f 映射维持了这个概率。这个测度为什么要具有这样的性质是显而易见的。

这个测度 μ 对 f 而言是遍历的，只要在任一 μ 的可积函数 g 中对于每一个 x (可能除 μ 的零测度集合以外)都有：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}g(f^{j-1}(x))=\int gd\mu$$

它以数学的精确方式说明，从一个典型的起点开始，x 未来路径上的那些点就像从 μ 的概率分布中随机选出的一些点那样分布着。

这特别意味着，如果人们考察一个给定的 x 下的分布(它使每一个 $f^i(x)$，$i=0, 1, \cdots, n-1$ 的概率为 $\frac{1}{n}$)，则这一分布的序列将接近 μ，除非 x 属于一个 μ 的零测度集合。因此，对所有典型的初始值而言，最终分布都是一样的。值得注意的是，在该系统运行一段时间后，在 μ 的零测度集合中 x 值

的变化实际上就将看不到了。

在这种情况下，假定具有理性预期的个人使用概率 μ 也许是合理的。已知非线性动态的复杂性，假定个人能够计算 μ 的值就是不合理的了。事实上，就是受过高级训练的纯数学家也只能在几种很简单的情况下计算这个不变测度。然而，通过对这个系统结果的大量观察，人们将能够得到大致接近于实际分布的结果。一项非常有趣的研究就是建立一个能够建构这一模型的学习过程。这个过程也许可以建立在我们上述实际观察的基础上。只要有一个遍历测度，则给所有观察以相等概率的结果就是收敛于实际的分布。

不变测度的一个最常见的例子就是当 $r=4$, $x_{t+1}=4x_t(1-x_t)$ 时的逻辑斯谛映射（方程 2.2）。在 2.4 节中，我们曾得到这个方程的一个解析解。这个系统具有密度函数为 $1/\pi\sqrt{(x(1-x))}$ 的一个不变测度。正如一般的概率分布不总有一个密度函数一样（例如，一个离散分布就没有密度函数），对于一个不变测度也不一定总能找到一个密度函数。在分布中可能有一些点群，其他的复杂因素也可能存在。因此，在 $r=4$ 的情况下我们就特别幸运了。

对于一个对该体系长期行为感兴趣的人来说，一个实用的理性预期的解释就是，他用不变测度来作为他期望的变量分布。然而在有些已知的例子中没有不变测度，在这种情况下根本不清楚理性预期是什么。对于那些鼓吹理性预期的人来说这是一个困难的问题。多数人提出的其他预期规则将在混沌领域中继续发挥作用，例如适应性预期。这里应该建立一个限制条件：即在这种情况下，并不是说在目前观察的基础上，不变测度能对下期某一特定变量的值作出良好的预期，

而是说一个不变测度可以对混沌变量提供一个合理的长期预期。

现在我们给出一个可以把预期建立在不变测度基础上的例子。假定消费者具有类似于贝纳比和戴(1981)所描述的那种方式的行为。由于以前消费对偏好的影响，实际消费将遵从一条混沌的路径。我们进一步假定所有消费者都具有一种类似方式的行为，即一个消费者的偏好独立于其他任何消费者的偏好。最后，我们假定有足够多的消费者以使大数定律能够适用，则如果产生消费者需求的动态过程具有一个不变测度，那么这个测度就应该是对产品供给者的需求的理性预期(这是在考虑到市场需求量与个人需求量间的差距而进行尺度再变换之后作出的理性预期)。

2.5 多维映射

到目前为止，我们只研究了含一个变量的一阶差分方程。这倒不是因为我们认为它提供了一个对经济活动的较好描述，而是因为我们对这个系统的了解最多。在更高阶的差分方程中，在不止有一个变量的系统中，以及在一个至少是三维的微分方程系统中，混沌也都可以出现。但我们对它们的了解不及我们在第 2 节中分析的一维映射那么多。然而某些多维系统已得到了很好的研究，例如洛伦兹方程和埃依映射两者都是高度简化的气象模型。

大多数已进行的研究都是有其物理学上潜在的应用目的的。但也有一些文章提出了把埃依映射应用到经济学中的可能性。大多数物理系统是耗散性的，即系统中包含磨擦力。

所描述的那样，这些思想已经开始被应用于经济学之中了。传统的经济学理论基本上一直在关注寻找稳定状态的问题，其次是寻找周期。动态系统理论一个可能的最大贡献就是使经济学家认识到其他答案也是可能的。

如前所述，动态系统理论已经成功地被应用于对流体力学的研究中。第 2 节所描述的许多现象（如倍周期序列）都在流体运动实验中得到了验证。巴尼特和陈平（1986）找到了在货币总量中的混沌行为的经验证据，这证实了这些理论的有用性。该理论也被应用到生物学中关于某些物种种群的动态行为的研究中。

流体力学与经济学相比有一个优点，其基本运动方程是已知的（即纳维—斯托克斯方程）。的确，它们能产生极复杂的行为，并且在很多情况下它们是不可解的。这些不足之处经济学同样具备，而另一个问题是我们并不能真正确定经济运动的方程。这就是经济预测与天气预报的重大差异。

经济学中有如下悖论。在微观经济学中，所有经济变量都被看作是具有最大化行为的经济活动主体的理性决策的产物，因此在微观经济学中所有变量都是完全确定性的。然而在宏观经济学中，经济变量却经常被当作随机的。这些相同的变量怎么能同时既是随机的又是确定性的呢？如果经济系统是混沌的，这个悖论就可以得到解释。

在本文所描述的非线性系统中，调整一个参数可以使一个模型从稳定的或周期的状态进入混沌区域。1967 年的宏观经济可能就发生了这种转变。那时，很多工业化国家从带有某些周期性波动的稳定增长状态转入经济活动变得相当无规律的阶段。从 1967 年起，许多经济变量的行为，如价格水

平和汇率变得相当难测。我们还不能肯定所观察到的现象就是混沌动态，有很多独立的干扰源影响着经济数据。然而，我们所看到的一些干扰可能不是独立于经济系统的外来噪声而是由该系统内部的混沌动态产生的内在噪声。[①]

对初始条件的敏感依赖不是一个新发现。它被显示于下述经典物理学的问题中：

解 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ （这是拉普拉斯方程）

它的边界条件是：

$$\text{在 } y=0 \text{ 时 } f(x,y)=\epsilon\cos(x)\text{，在 } y=0 \text{ 时 } \frac{\partial f}{\partial y}=0$$

这里假定 ϵ 非常小。最好把 $\epsilon\cos(x)$ 这一项看做是在边界上测量 x 时的误差。显然，解就是：

$$f(x,y)=\epsilon\cos(x)\cosh(y)$$

即使 ϵ 非常小，当 y 增长时，它也会变得非常大。因此任何误差，即使非常小，在边界上测量函数值时，在定义域内也将对解的值产生很大的影响。这种系统的行为实质上是不可预测的。[②]

动态系统理论的结果具有一个良好的结构，这很难与观察到的经济行为相吻合。在第 2 节的逻辑斯谛映射理论中，当参数 r 的值在[3，4]区间内变化时，就可以发现无数稳定的轨道。其行为随后还会出现一些我们尚未详细讨论过的其他特征（一个重要的例子就是费根鲍姆的通用尺度变换理论）。

---

① 这个观点出自南加州大学的理查德·戴。

② 我是从赫尔曼·邦迪那儿听到这个例子的。

在混沌区域中描述运动的概率分布可能非常复杂，它们可以包括许多点群。一般说来，它们是不连续的，即这种分布不能用密度函数来表示。

包含了随机误差以后就会极大地改变这种情况。理论动态变成了对实际经济指标合理得多的描述。除了有限的几个周期轨道之外一切都消失了。通常这些轨道的数目非常少，大约有 4 条，所以它们不会紧紧靠在一起。与此相似，概率分布就变得更平滑了。因此，在出现噪声时，人们就更容易相信混沌动态提供了一种对经济行为的良好描述。

孙　杰

译自 1988 年 40 期《牛津经济文献》

3 混沌学:重要性、机制及经济学上的应用

威廉·J·鲍莫尔　杰斯·贝纳比*

请读者想象一种讨价还价模型(如外交官们协商关税水平或裁军条约):每一方都接受上司的指令来对对手新的报价作出相应的反应,这种反应可以从预先提供的简单的反应函数计算而得。协商双方都被禁止将自己的反应函数暴露给对方。如果报价和还价的这种完善的决定论序列——它*一定*会在这些简单规则中出现的——开始以随机的方式出现不规则且明显的振荡,而由于每一方并不理解出现这种问题的根源而开始怀疑对方口是心非和故意破坏,则该谈判会很容易破裂。然而,正如我们将看到的,上面所涉及的这一切都是一种被称为"混沌"的现象。混沌所强调的并非一种不正常的状况,而是强调在这种状况中,一个非常简单的决定论的

* 威廉·J·鲍莫尔(William J. Baumol),系美国普林斯顿大学和纽约大学经济学教授;杰斯·贝纳比(Jess Benhabib),系美国纽约大学经济学教授。——译者

动态机制能够产生出一条复杂得足以通过大多数随机性的标准检验的时间路径。

混沌学已成为专家和非专家们极为关注的一门学科，不仅经济学，而且几何学、物理学、生态学及气象学的文献中也出现了关于混沌的研究。《纽约时代杂志》、《科学美国人》及其他专业性出版物上对此已有过详细的论述。本文力图描述的是：什么是混沌，它是如何运行的以及它对经济学意味着什么。

3.1 早期动态模型中的根源

在浩如烟海的关于商业周期的非数学文献中，我们可以找出经济学家们对复杂动态感兴趣的根源。在这些文献中包含着大量的模型，每一个模型都能够提供一系列足以导出经济波动行为的条件。然而，许多模型是含糊的，其逻辑难以验证。

这种局面在本世纪30年代因弗里希(1933)、伦德伯格(1937)、萨缪尔森(1939)等人所做的工作而发生改变，他们运用差分方程、微分方程以及微分方程和差分方程的混合模型导出了决定论的时间路径。这种模型很容易证明：在宽广范围内选出的任何参数值——这经常是极易计算的——必然会得到一条波动的时间路径。

例如，最简单类型的差分方程是一阶(一周期的时滞)线性方程 $y_{t+1}=ay_t$ ，其中 y_t 是单个变量在时间 t 点的值。如果给定初始值 y_0，则显然可导出时间路径

$$y_1=ay_0, y_2=ay_1=a^2y_0, \cdots, y_t=a^ty_0$$

同样显而易见的是，参数 a 的任何负值都能产生出一条波动的时间路径，因为 $a^t y_0$ 连续地从正值趋于负值并返回。

萨缪尔森著名的乘数-加速数模型(1939)是一个过于简化的例子，它由三个标准关系构成

$$Y_t = C_t + I_t \ , \ C_t = cY_{t-1} + K \ , \ I_t = b(Y_{t-1} - Y_{t-2})$$

其中 Y 是国民收入(产出)，C 是消费，c 是边际消费倾向，I 是投资。C 方程明显是一个带有一周期时滞的线性消费函数。投资函数是一个线性的时滞加速，其中投资被假定为按前期产出增长率的一定比例进行。将后两个方程代入第一个方程中立即可得到

$$Y_t = (c+b)Y_{t-1} - bY_{t-2} + K$$

这就是萨缪尔森的二阶线性差分方程。从中很容易可以看出，对于宽广范围的 b 值和 c 值，该方程都能导出波动，而且不难从直观上解释这种波动机制的经济学含义。

一些主要经济学家热情地接受了这些模型，并为之撰写了大量文章。然而不久，失望的情绪开始出现，著书出版工作也放慢下来。造成这种局面的基本原因有二。首先，由这样一种线性动态系统产生的时间路径的变化可能对参数值以及模型结构的变化极其敏感这一点变得较为明显。这样就难以系统地阐述且完整而可靠地表现现实的模型(以及对其参数值作经济计量的估计)。正如我们将看到的，虽然这实际上并非这些模型的缺陷，但却是这些模型解释上的一个弱点。这种敏感性尽管具有一种相当不同的多样性，但在混沌模型中仍是成立的，且是混沌模型令人感兴趣的主要原因之一。其次，人们早就认识到，从定性的角度讲，这样的线性模型能且仅能产生四种类型的时间路径：①波动且稳定的(即以递减振

幅的波动形式向某个固定的均衡值收敛)；②波动且发散的(振幅不断递增的周期)；③非波动且稳定的；④非波动且发散的。不久人们就认识到，甚至比萨缪尔森模型更为复杂的(即更高阶的)线性方程也不会产生任何从根本上不同于这四种类型的时间路径。就经济学家的研究目的而言，单单这四种可能的时间路径的构造范围是不够充分的，因为在现实中，时间路径经常是更为复杂的，而且许多波动看起来既不发散也不收敛到无。

希克斯和古德温的非线性模型为该难题提供了一种解决办法，其一般形式是 $Y_t=f(Y_{t-1},\cdots,Y_{t-h})$。他们不仅对规范的数学问题作出了回答，而且也对现实经济学问题作出了回答。例如他们指出，这样一种非线性模型能够得到一个稳定的极限环，对于该极限环，变量 Y_t 的所有可能的时间路径均收敛。也就是说，时间路径不是以趋于零振幅的衰减振动收敛于一个固定的均衡值 Y^*；相反，这些非线性模型能够得到一个稳定的均衡周期，Y_t 沿着该均衡周期的路径不停地从波峰游荡到波谷。虽然这项工作几乎已经触及要多大程度地引入非线性方能产生混沌行为的问题，但仍有大量的问题有待探讨。

从本质上讲，混沌理论表明：一种简单的决定论的、但是非线性的关系(如一个一阶非线性差分方程)能够产生极为复杂的时间路径。无论时间的推移，还是参数值的微小变化都会因随机振荡而使系统内在行为出现明显的扰动并发生突然的剧烈的质变。混沌的时间路径与其他相比具有以下特征：①轨迹(时间路径)有时能展示出行为的剧烈质变，这有些像巨大的随机扰动情况(例如，从小振幅周期突然变为大振幅

此外，尽管存在着这种敏感性，但对于反驳先前那些命题（这些命题以前太轻易地为人们所接受了）的普遍合理性而言，这些动态模型被证明是有效的工具，它同样对政策的设计者也作出了有效的相应警告。例如，人们经常通过反例，用这种模型来反驳有利可图的投机总是且必然是稳定的断言。就是说，如果商品的价格恰巧在投机者买进那一时刻上升和卖出那一时刻下降的话，那么，即使投机者在低价时买进和高价时卖出，也可以想象他们的行为会增大他们所投机的商品的价格波动幅度。同样，在这种随行就市的反应中一个短暂的滞后行为会明显地削弱合理的反周期政策的效力。对于一个力求实施"显而易见的"政策的政府而言，即使其反周期手段中的滞后行为被不现实地假定为极小的，但是政府所采取的诸如当国民经济的产出（或增长率）低于某一目标水平时就扩大支出，当产出（或增长率）高于某一目标水平时就减少支出的政策也能增加经济波动的幅度。

混沌理论在对经济分析家和政策设计者提出警告方面至少具有同样的效力。例如，该理论告诫我们，貌似随机的行为可能完全不是随机的，这显而易见地表明了外推法的危险性和困扰经济预测的困难之所在。混沌理论为建构理性的经济活动主体的简单行为模型提供了基础，并向人们展示了即使是这些模型也能产生极为复杂的发展。这一理论提供了学习行为模型的基础，也自然地出现在许多标准均衡模型之中，同时还使我们增加了对大量经济模型中振荡的经济根源的了解。我们将在描述完所需的工具之后对这些加以说明。此外，有关该领域的一些参考文献向我们揭示了这一主题在经济学中所涉及的范围。①

3.2 复杂的周期模式是如何产生的

由于下面的许多讨论将涉及周期行为和振荡行为，因此精确地定义这些词汇是很重要的。如果一条时间路径 y_t 从其轨迹上的任何初始点起，每 P 个周期就精确地自我重复，且从不在更短的周期内自我重复，则 y_t 被认为具有周期(cycle)的特征，其持续时间为 P 个周期。简而言之，任何在每 P 个周期中都精确地自我重复的模式被称为 P-周期的循环(p-period cycle)。

相反，振荡的时间路径的定义是相当模糊的，它指一条非单调的，其变量值"频繁"上升和下降的、极少或从不重复其先前轨迹的任何一部分的时间路径。

---

① 在经济学中，最早提出有关周期和混沌动态行为的可能性的是梅和贝丁顿(1975)。而后，这种行为又被证明出现于下列模型之中：简单的特定宏观经济模型(Day and Shafer 1983)，双头垄断模型(Rand 1978)，增长周期模型(R. A. Dana and P. Malgrade 1984)，需求和供给的蛛网模型(R. V. Jensen and R. Urban 1982)，受制于借贷约束的厂商模型(Day 1982)，具有内生体验的选择的动态模型(Benhabib and Day 1981)，生产率增长模型(Baumol and Wolf 1983)，广告支出的动态模型(Baumol and Quandt 1985)，分析军备竞赛、裁军和谈判的模型(Baumol 1986)。周期和混沌动态也大量出现于各个时期间的一般均衡的竞争模型中。这些结论极富于启发性，因为它们表明，即使在标准的竞争假设，诸如市场出清、完全的信息、完全的预见等等条件下，价格和产出也能发生振荡。在交易的叠代模型中，贝纳比和戴(1982)提出了当年轻的一代是净借贷者时，在完全预见条件下周期和混沌动态的充分条件；格朗蒙特研究了年轻的一代是净储蓄者(萨缪尔森的情况，见 Gale 1973)且正确地学会了预测周期均衡的情况。在具有无限个已存在的经济活动主体的均衡模型中，贝纳比和西村(1979，1985，1989)提出了周期均衡的充分条件；而最近，博尔德林和蒙特鲁奇奥(1985)、德内克拉和佩利坎(1984)对此作了更为抽象的处理，他们同样得出了混沌轨迹能够出现于这类模型中的结论。今天，混沌经济学领域的研究成果层出不穷，上面所列的文献只不过是沧海一粟而已。

这座“山丘”的高度、坡度和位置以满足需要。这个相图(即将明确地被描述出来)是用于分析差分方程模型所导出的时间路径的几何工具,它在混沌分析中被广泛使用。

通常用于说明混沌现象的函数是具有单一参数 ω 的二次方程:

$$y_{t+1}=f(y_t)=\omega y_t(1-y_t),\text{其中} dy_{t+1}/dy_t=\omega(1-2y_t) \quad (1)$$

图 3.1 中的**相曲线**(山丘状曲线)被定义为差分方程 $y_{t+1}=f(y_t)$ 的图形;该图表示 $\omega=3.5$ 时 $y_{t+1}=f(y_t)$ 的情况。图 3.1 也展示出用图示方法产生一条时间路径的过程,这是人们在基本经济动态中熟知的方法:首先利用相曲线从 y_0 找到 y_1(A 点),其次利用 45°线将 y_1 从纵轴转到横轴(B 点);然后重复这一过程,从 y_1 找出 y_2(C 点)等等。①

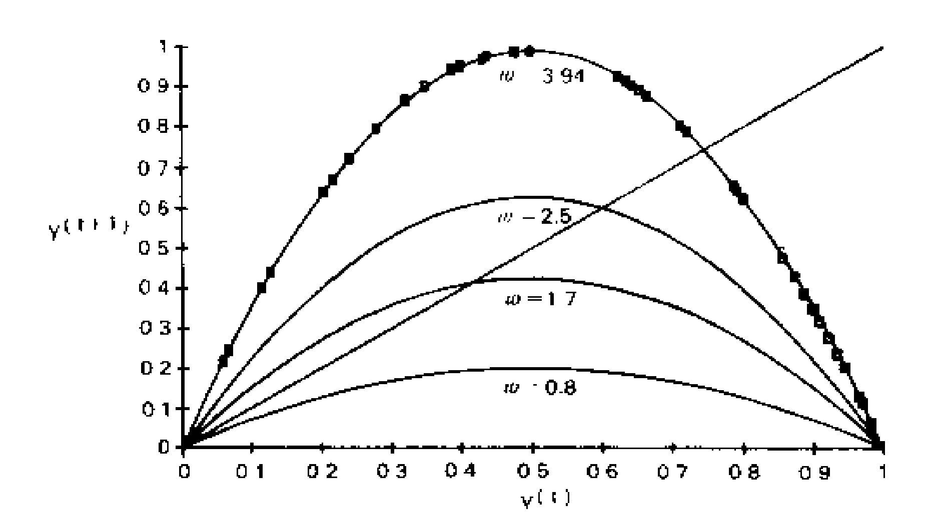


图 3.2 不同 ω 值的 y(t+1)=ω y(t)[1−y(t)]和模拟的路径

---

① 我们立刻就可从(1)式中看到:无论什么样的 ω 值,该方程的图形(相曲线)总是在 $y_t=0.5$ 处达到最大值,此时 $dy_{t+1}/dy=\omega(1-2y_t)=0$。在该点上,曲线的高度是 $\omega\times0.5(1-0.5)=\omega/4$,它以一定比例向 ω 递增。

图 3.2 表明，该相曲线的高度及其与 45° 线交点(均衡点)的斜率依赖于差分方程(1)式的参数值 ω。图中列有四种一般情况，从方程(1)很容易直接得到：(1)如果 $\omega<1$，则在正象限内，相曲线完全处于 45° 线之下；[1]但是，如果 $\omega>1$，则相曲线与 45° 线存在着一个正值($y_t>0$)的交点 E(均衡点)。尤其是，(2)如果 $1<\omega<2$，则相曲线在交点处的斜率是正的；(3)如果 $2<\omega<3$，则相曲线在交点处的斜率是负的，但绝对值小于 1；(4)如果 $\omega>3$，则相曲线在交点处的斜率小于 -1。

最后一种情况，$\omega>3$，是本文兴趣之所在。其原因有二：第一，由于该相曲线在均衡点处的斜率是负的，故从差分方程的基本理论可知，其时间路径必定是振荡的。蛛网状的振荡在每两个相连时期中上升和下降，它在一个时期中有最高点 y_t，紧接着在下一个时期中则有最低点 y_{t+1}，这恰如当 $a<0$ 时 $y_t=a^t y_0$ 中的情况。第二，由于该斜率的绝对值大于 1，故这条时间路径在 y 的均衡值 y_e 附近的振荡将是发散的(振幅不断递增)，越来越远离 y_e。下面这种情况就是这样一条时间路径的一个例子：由于 $y_{t+1}=-2y_t$ 且 $y_1=1$，故 $y_2=-2$；$y_3=+4$；$y_4=-8$；等等。在图 3.1 中，这样一条路径被表示成围绕着 E 点的蛛网状的轨迹。

如果该图形不是“山丘状的”，那么蛛网状的振荡会越来越远离均衡点，这种情况超出了我们此处所讨论的范畴。但

---

[1] 由于在相曲线与 45° 线相交处，$y_{t+1}=y_t=y_e$，故 $y_e=\omega y_e(1-y_e)$ 或 $\omega y_e^2=(\omega-1)y_e$。因而，对于 $\omega<1$，$y_e=(\omega-1)/\omega$ 将不具有一个正值。注意，通过(1)式可知，在 E 点处，相图的斜率是 $\omega(1-2y_e)=\omega-2(\omega-1)=2-\omega$。

是，在相曲线呈“山丘状的”情况中，当这种蛛网扩展时，它最终会遇到“山丘”的正斜率的那一边，并且在比前一个 y_{t+1} 值更接近于均衡水平的一个 y_{t+1} 值处“反弹起来”。（因此，在图 3.1 中，N 点的高度比前一点 M 更接近于均衡点 E 的高度。）这样一种向均衡的复归最终必定发生，因为蛛网在其发散阶段进一步向左侧扩展时，在随后的下一次移动中，其高度由于该图的左侧部分的斜率是正的而必定下降。当这种情况发生时，这些循环将开始再度向 E 点收敛，但这只能是暂时的，因为这条相曲线在 E 点处斜率的绝对值大于 1，所以 E 是一个不稳定的均衡点，正如我们已看到的那样，它产生出一条发散的时间路径。

将上述行为看作类似于一个台球以某种复杂的形式从球台四壁反弹的情况是极有启发性的。我们很容易想象出，为什么在这种情况中时间路径会变得复杂起来，这正是混沌所需要的。更令人惊奇的是，这种模式的混沌行为随后将遵循某些极为简单且有条理的法则。

为了理解这种有序的模式，更细致地描绘混沌行为是必要的。虽然在讨论时，我们基本上依据混沌方程的一个实例 $y_{t+1}=\omega y_t(1-y_t)$ 来进行，但实际上，范围很广的一组关系 $y_{t+1}=f(y_t)$ 具有完全相同类型的行为，其图形通过调整参数值也呈现为“山丘状的”和“可调谐的”。

在此，我们把将被显示出的结果先告诉读者，不做任何解释。我们将看到：在 ω 值略小于 3 时，将存在着其振动向一个稳定的均衡点 E 收敛的蛛网时间路径（图3.3a 和 3.3b）；当 ω 值略大于 3 时，这些时间路径将由另一条路径代替，此路径先发散，然后收敛于具有两个时期长度的稳定的极限环（相图

3.3c 中的长方形轨迹 LL'HH' 及相应的图 3.3d 中明显具有 2-周期极限环的时间路径)；当 ω 值继续增加时，这个 2-周期的周期将依次(在一个已知的 ω 值处)产生一个四个周期长度的周期；当 ω 值更高时，这个周期将依次生成一个 8-周期、16-周期，等等。此处诸如"4-周期的周期"的这类词意味着不断重复诸如"高点⟶低点⟶更高点⟶更低点"这一过程的一条路径。

当调谐(或控制)参数达到某一值时(在本例中 $\omega=3$)，在该点上，均衡点 E 由于相曲线斜率的绝对值大于 1 而变得不稳定，我们就从这种情况开始我们的讨论。正是在该 ω 值处，稳定的 2-周期极限环 $y_1, y_2(y_3=y_1)$ 开始显露出来。随着 ω 值进一步增加(在本例中至 $\omega\simeq3.4495$)，2-周期将变得不稳定。就在 $\omega\simeq3.4495$ 处，我们将观察到一个稳定的 4-周期 y_1^*、y_2^*、y_3^*、$y_4^*(y_5^*=y_1^*)$ 初露端倪。该 4-周期的 4 个点中的两个 y_1^*、y_3^* 是由 2-周期的两点之一 y_1 衍生出来的，这一过程被称作"分岔"(我们马上就要对它作出解释)，而其他两个新出现的点 y_2^*、y_4^* 则是由 2-周期的另一点"分岔"出来的。

随着参数 ω 值的进一步增加，4-周期本身逐渐变得不稳定。从构成 4-周期的四个值 y_1^*、y_2^*、y_3^*、y_4^* 的每一个上分岔出两个新的点。这些新出现的 11 个点现在构成了一个稳定的 8-周期。当 4-周期被引入时，2-周期依然存在；类似地，当 8-周期出现时，4-周期和 2-周期也依然存在。随着 ω 值的增加，这种倍周期分岔过程将重复下去，不断地增加新的稳定周期。最终，在适当的参数值处，时间路径必定包含无限多个周期。

起初，这些周期只是个数不断递增的偶数周期——它们都是 2 的幂。然后，个数为奇数的周期出现。第一个进入时

一系列条件成立时，人们就可以说混沌是存在的。

然而，有一点应该明确，当无限个周期存在时，一般而言，并非所有的周期都能对时间路径产生相等效力的影响。例如，当4-周期进入画面时，2-周期极限环继续存在于模型的结构中，但由于它现在是不稳定的，所以一般来说它不再影响时间路径的长期行为。类似地，当8-周期出现时，虽然4-周期极限环仍保留在画面上，但不稳定性将导致其对时间路径的影响大量被剥夺掉。

图3.1和图3.3e表明了在$\omega=3.5$的情况下，时间路径是怎样逐渐接近4-周期极限环的。除了显示$f(y_t)$的情况，图3.1也包括了从$y_0=0.034$出发的最先10个时期的时间路径。所得到的混乱的蛛网状路径展示出围绕E点的振荡行为，但这种运动模式并不显著。然而，图3.3e反映了当t接近无穷时y_t向之收敛的时间路径。从图中我们观察到时间路径落入一种循环模式（ω值还未进入混沌行为的区域），我们似乎得到了两个循环套——时间路径交替处于两者中的一个上。周期路径$AA'BB'$并未返回到出发点A，相反走向邻近的C点；然后沿着周期路径$CC'DD'$运动，然后又奇迹般地返回到另一个周期的出发点A。但这并非巧合，而是这一过程的标准形式，其原因将在下一节的分析中指出。

为了观察这一过程是怎样产生4-周期的，我们把目光转向图3.3f——它是由图3.1和图3.3e中的相图导出的时间路径。粗略地流览一下该图，我们仅看到一个实际长度只有两个时期的持续（但并非完全重复的）振荡，它显然支配着时间路径的行为。但是，将长度均为四个时期的两个周期性扰动叠加在这个振荡上面，则它们共同构成了4-周期。为了看

到这些，我们必须首先只观察时间路径的上半部 a, c, e, g, i，然后再观察下半部 b, d, f, h, j。

上半部描述了振荡的第一部分。从 a 出发，跳过一个时期，y_t 降到 c；接着，在间隔了另一个时期后，y_t 又上升至 e。不断地以这种方式继续下去，我们就得到一个其高点是 a、e、i ……低点是 c, g, ……的振荡扰动，同时，四个时期的时光在这种从一个高点到下一个高点的运动中流逝。这种振荡与相图 3.3e 的时间路径中水平部分 AA' 和 CC' 之间高度的差异相对应。现在，读者通过观察下半部 b, d, f, h, j, 将很容易地识别出图 3.3f 中其他 4 个时期的振荡扰动。这一切的最终结果(在极限内)构成了一个单一的 4-周期，即每四个周期精确地重复其自身一次的一个周期，正如通过细致地检查图 3.3f中时间路径的右端而确认的那样。

3.3 混沌行为的有序结构 ①

现在，我们开始考虑为什么这样一种有序的进程能够达到混沌。这个进程是：随着 ω 的增加，首先有一个稳定的 2-周期。接着，在2-周期变得不稳定的 ω 值处，出现一个稳定的 4-周期；正如我们已看到的那样，这个 4-周期由两组振荡构成，一组围绕着 2-周期的最高点，一组围绕着 2-周期的最低点。然后，在 4-周期变得不稳定的 ω 值处，8-周期出现。如此下去，以至无穷。我们将力求对此做出直观上有说服力的解释。

① 下面的大量讨论基于梅(1976)的精彩分析。

我们从研究稳定的 2-周期是如何产生的着手，因为随后的 4, 8, 16 及更高周期的引入机制与此完全类似。由于我们要研究从一个稳定的均衡点 E 到一个稳定的2-周期的转变，所以我们必须相应地扩展我们的分析工具。众所周知，一个均衡点被定义为 $y_{t+1}=y_t=y_e$ (必要条件)。这显然将两个逐次的时期中的 y 值做了比较。

但如果一个均衡是由一个 2-周期构成的，则显而易见它应被定义为 $y_t=y_{t+2}$, $y_{t+1}=y_{t+3}$。这显然需要比较每隔一个时期的 y 值。因此，为了研究 2-周期的产生，我们需要(知道) y_{t+2} 和 y_t 之间而非 y_{t+1} 和 y_t 之间的关系。这样一种 2-周期关系由关系 $y_{t+1}=f(y_t)$ 的二次叠代得到。即我们首先从 $f(y_t)$ 中得到 y_{t+1}，然后顺次从 $f(y_{t+1})$ 中得到 y_{t+2}，即 $y_{t+2}=f[f(y_t)]$。为了完成这个计算，如果，例如 $y_{t+1}=\omega y_t(1-y_t)$ 从而使 $y_{t+2}=\omega y_{t+1}(1-y_{t+1})$，则我们可把 y_{t+1} 的表达式从第一个方程中代入第二个方程内，在 y_{t+2} 和 y_t 之间得到一个直接关系 $y_{t+2}=f[f(y_t)]$。(今后，我们将用 $f^{(2)}$ 代表 $f[f(y_t)]=$

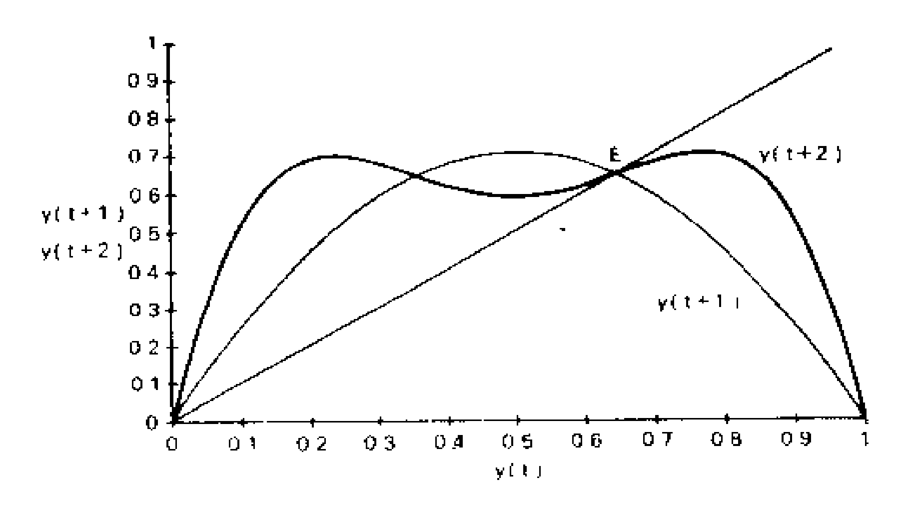


图 3.4a $[f(y_t)], f\{f[f(y_t)]\}, y(t+1)=[f(yt)]=2.8y(t)[1-y(t)]$

y_{t+2}，$f^{(3)}$代表$f\{f[(y_t)]\}=y_{t+3}$，等等。)

为了阐述2-周期的引入，我们必须首先考虑一般的2-周期关系 $y_{t+2}=f^{(2)}(y_t)$ 的图形特征。这可以被看成纵轴为 y_{t+2} 而不是 y_{t+1} 的图中一条2-周期相曲线的方程。在图3.4a中，具有典型的双峰的这样一种曲线[标为$y(t+2)$]被叠加在山丘状的2-周期相曲线[标为$y(t+1)$]上。

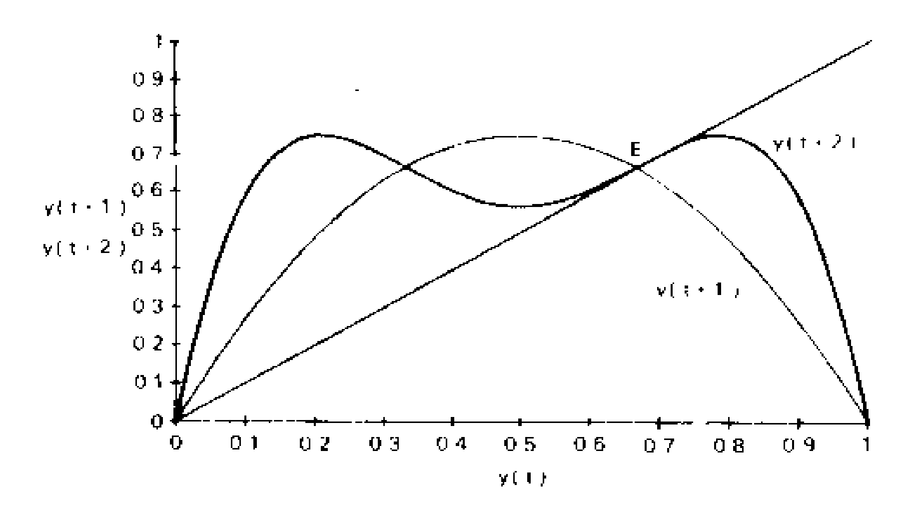


图3.4b $[f(y_t)]$，$f\{f[f(y_t)]\}$，$y(t+1)=[f(yt)]-3y(t)\{1-y(t)\}$

我们来检查一下相曲线 y_{t+2}（或$f^{(2)}$）和 y_{t+1}（或f）之间的关系。首先，我们注意到，图3.4a中的这两条相曲线在两个相同点即 $y_t=0$ 和 $y_t=1$ 处都交于横轴。这被归纳为**命题1**[①]：如果 f 的图形通过原点，则 f 的所有根（即 $y_{t+1}=f(y_t)=0$ 的点）也一定是 $f^{(2)}$ 的根。

接着我们注意到，这两条相曲线在一个共同的均衡点 E 处与45°线相交。这可归纳为**命题2**：f 的任何均衡点也一定是 $f^{(2)}$ 的一个均衡点。

① 命题1的证明：令 y^* 是 f 的一个根，则由于 $f(y^*)=0$，故 $f[f(y^*)]=f(0)=0$。

我们也有命题3:[1]在 f 的一个均衡点处的 $f^{(2)}$ 的斜率一定等于 f 斜率的平方。即在任何 $y_e = y_t = y_{t+1}$ 处，我们一定能得到 $df^{(2)}/dy_t = (df/dy_t)^2$。

评论：特别是在原点处，命题3一定成立，因为在该点 $y_{t+1} = y_t = 0$。注意：相应的命题对任何 $f^{(n)}$ 也成立，其中 n 是任何正整数。

对 $f^{(2)}$ 和 f 图形最后的也是关键的观察是：在图上（正如方程1的情况那样），基本关系 $f(y_t)$ 是二次的（它包括一个含 y_t^2 的项于其中），因而具有一个极值，而关系 $f^{(2)}(y_t) = f[f(y_t)]$ 将是四次的，它具有一个含 y_t^4 的项，读者通过直接代入就能证明这一结论。（例如，如果 $y_{t+1} = y_t^2$ 使 $y_{t+2} = y_{t+1}^2$，则 $y_{t+2} = y_t^4$。）因此，我们能够期望从 $f^{(2)}$ 中得到两个最大值和一个最小值，或者两个最小值和一个最大值。这就是为什么如图中所示的那样，$f^{(2)}$ 的图形具有一个典型的双峰。②

图3.4a—4c说明了随着 ω 值的增加，上面所论述的那些关系的行为。正如我们将要解释的那样，每个图都是从不同 ω 值的、我们用作实例说明的基本方程中导出的，并且我们将确切地看到，为什么两个新的均衡点恰好在调谐参数（tuning parameter）的某个值（我们的例子中是 $\omega = 3$）处必定出现，在该值处，初始均衡点 E 变得不稳定。

---

① 命题2的证明：如果 y_e 是 f 的一个均衡点，则 $f(y_e) = y_e$，因而 $f^{(2)}(y_e) = f[f(y_e)] = f(y_e) = y_e$。命题3的证明：$df^{(2)}/dy_t = (dy_{t+2}/dy_{t+1})(dy_{t+1}/dy_t)$，但在 $y_t = y_{t+1} = y_e$ 处，我们一定有 $dy_{t+1}/dy_t = dy_{t+2}/dy_{t+1} = df/dy_t$。

② 这也以另一种方式指出了分岔过程是如何进行的。$y_{t+2} = f^{(2)}(y_t)$ 的均衡点根据定义要求 $y_{t+2} = y_t$，此值称为它们的公共值 y_{e2}。因此，得出这些均衡点的方程 $y_{e2} = f^{(2)}(y_{e2})$ 是二次的。该方程根中的两个将一直是虚数根，直至 ω 达到某一值时为止，在该值处新的均衡出现

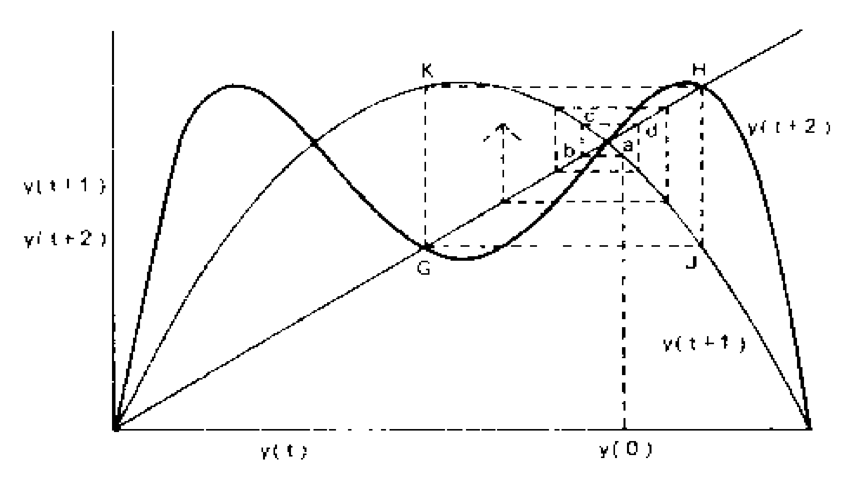


图 3.4c　$[f(y_t)], f\{f[f(y_t)]\}, y(t+1)=[f(y_t))]=3.43y(t)[1-y(t)]$

根据命题 3，所有三个图中的 $f^{(2)}(y_t)$ 必定在 $f(y_t)$ 与横轴的交点上同横轴相交。显而易见，这些曲线的每一条在原点附近都具有大于 1 的斜率，因而都在 45°线以上。最后，在均衡点 E 处，所有三条相曲线 $f(y_t)$ 都具有斜率 $2-\omega$（见 62 页注②），因而根据命题 3，$f^{(2)}$ 都具有斜率 $(2-\omega)^2$。

随之而来的是，当 $2<\omega<3$ 时（如图 3.4a 中所示），$f^{(2)}$ 的斜率是正的且小于 1。也就是说，当从左向右移动时，$f^{(2)}$ 曲线从45°线之上与之相交于 E 点。

图 3.4b 表明了 $\omega=3$ 的情况：在 E 点，$df/df_t=-1$；$f^{(2)}$ 的斜率是 $(df/dy_t)^2=(2-\omega)^2=+1$。因此，正如该图所显示的那样，$f^{(2)}(y_t)$ 在 E 点处正切于 45°线。

最后，所有情况显现于图 3.4c 中，在该图中 $\omega>3$，因而 $df^{(2)}/df_t=(2-\omega)^2>1$。因此，当从左向右移动时，$f^2(y_t)$ 曲线必然从 45°线之下与其相交于 E 点。这意味着当 $f^{(2)}(y_t)$ 离开原点后，起初处于 45°线以上；在 E 点左侧的某一点 G 处，

点的稳定性不断丧失而从较低阶周期中导出的。与此不同的是，奇数周期不能从较低阶的周期中分岔出来，它们成对出现或消失，而每一对由一个稳定的周期和一个不稳定的周期构成。

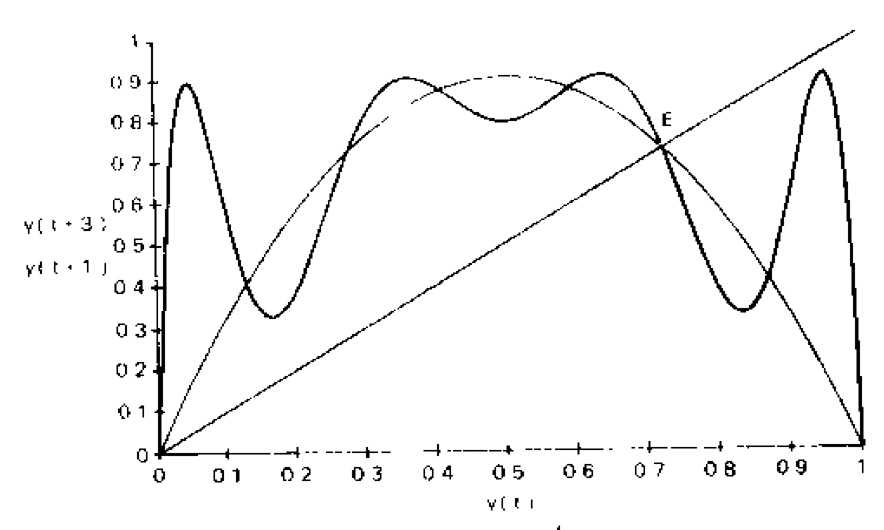


图 3.5a　$y(t+3)=f(f\{f[y(t)]\}), y(t+1)=3.6y(t)[1-y(t)]$

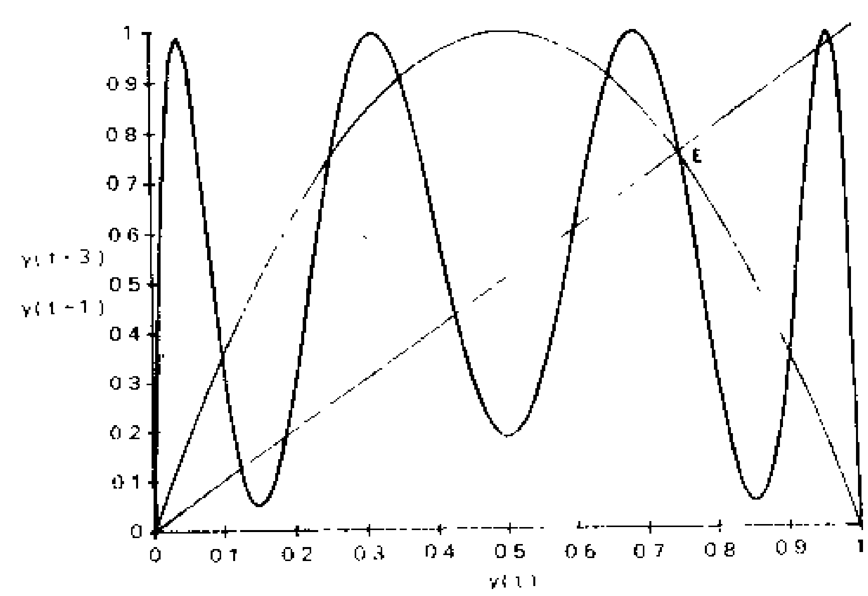


图 3.5b　$y_{t+3}=f(f\{f[y(t)]\}), y(t+1)=3.95y(t)[1-y(t)]$

3.6 混沌与奇怪吸引子

尽管“奇怪吸引子”(strange attractor)一词散发着某种性怪癖的味道，但它却是一个提供另一种内视混沌现象的运行的专业词汇。无论一个稳定的动态系统是否为混沌的，在多数情况下，我们都可以用一个*吸引子*描述该系统的均衡或极限时间路径。例如差分方程 $y_{t+1}=0.5y_t$，它显然向均衡值 $y_e=0$ 收敛，因此无论起始点在何处，该方程的任何时间路径都将在极限情况下收敛于相图中的原点。该原点则被说成是这种关系的吸引子；并且在这种情况中，吸引子显然是唯一一个点。

在别的情况中，吸引子就比较复杂。例如，该系统的所有时间路径在相图中可能呈蛛网状，它们向一个简单的长方形收敛。这意味着该时间路径将在极限情况下稳定在一个2-周期的振荡上，即它不断地沿着上面提及的那个长方形来回移动，不断地从长方形的顶边运动到底边，再从底边返回到顶边。此处吸引子是这个长方形，即它是一个2-周期极限环，该系统的所有时间路径均向它收敛(图3.3c)。

正如图3.1和图3.3e中所说明的那样，吸引子能够变得更为复杂。在图3.1中，我们看到一个复杂的蛛网状路径，它收敛于图3.3e中所显示的吸引子，这个吸引子或许能被描述为一对相互缠结的长方形。因此，该方程的相曲线是一条近似于图3.3f中那种情形的、带有几分混乱的振荡的均衡时间路径。

直觉告诉我们，下面的判断是正确的：在稳定的情况中，

随着相应参数值的变化使该系统的吸引子逐渐变得复杂起来时，某些时间路径将逐渐呈现出混沌的特征。在定义一个奇怪吸引子之前，我们必须指明以下两点：第一，如果一条有界的时间路径从不返回到它先前所经历过的任何点，则它被称为非周期的；第二，如果一个无限集的元素在数目上与所有整数集相一致，则它被称为“可数的”，否则，就称为不可数的。

现在我们再转到奇怪吸引子的研究上来。大致上我们可以认为，当从一个点集的邻域出发的复杂路径被该点集所吸引时，该点集就是一个奇怪吸引子。更确切地说，奇怪吸引子是一个不可数的点集，它使从其内部出发的所有时间路径仍留在该集合中；邻近的时间路径将被它所吸引；从该集合中出发的时间路径可能是非周期的，或者具有同事先任意选定的数值一样长的持续期。

虽然存在着提供奇怪吸引子画面的可能性，但由于奇怪吸引子呈极为卷曲的形状，因此在不求助于三维彩图的情况下，很难做到这些。

3.7 时间路径的敏感性

无论初始点多么接近都将产生发散的时间路径，这一点很重要，特别是对于预测。这种发散被称为“对初始条件的敏感依赖”，并且引起了经济学以外的、也应用混沌理论的许多学科的极大关注。例如，气象学家授予这种敏感性以”蝶翼现象”的名称。它指的是这样一种可能性：如果气候是由混沌关系控制的，则一只蝴蝶偶然地在香港振动一下翅膀，能引起俄克拉何马刮龙卷风。

下面的两个图示将说明这种敏感性的程度。在图3.6a和3.6b中，除了图3.6a中的$\omega=3.935$，图3.6b中的$\omega=3.94$以外，初始条件或其他方面均没有差异。这两个图表明，参数值中小数点后第三位数的变动能够改变整个画面的形状。如果我们将参数值移至3.945处，则类似的质变也会发生。因此，我们很容易地得出，参数值中极其微小的变化也能够导致类似的剧变。不仅如此，如果我们令参数值为常数且在混沌区域内略微地改变初始条件，则时间路径也会出现同样惊人的质变。

我们能以另一种方式表达出一个由一条混沌的时间路径所控制的变量的时间路径的这种敏感性。在理查德·匡特的计算中，我们例举的方程$y_{t+1}=\omega y_t(1-y_t)$的时间路径被测定了两次，每次640个时期。在第一次计算中，将小数点后第7位以后的数值四舍五入；在第二次计算中，将小数点第14位以后的数值四舍五入。在ω值低得还不足以使该方程进入混沌区域的条件下，这两条被测算的时间路径保持着实际上完全相同的形态，甚至在600次叠代后也是如此。相反，在ω值大得足以使该方程产生混沌的条件下，仅在30次叠代后，这两条路径就完全丧失了任何相似之处。

如果存在着稳定周期的时间路径——它们吸引从几乎所有初始点出发的轨迹——则对初始条件的敏感依赖将不能被观测到。对于这个二次方程式的例子来说，将会有许多处于3和4之间的ω值使稳定的轨道存在，也会有一个“巨大的”ω值的集合使轨迹对初始条件敏感依赖。肖（1981）的研究也表明，对于这个二次方程式来说，当ω值处于3.5和4之间时，敏感依赖将是普遍的（在正勒贝格测度的ω值的一个集合

这种意义上说，敏感依赖将会发生。勒贝格测度是对一个集合中点的数目的一种标准测度，它由完全被这些点所占据的总面积或体积来界定。见 Jacobson 1981)。

这些图示指出了对现有混沌现象作出预测会面临的困境。甚至一个具有空前精确度的预测程序也可能在这样一类情况中产生与未来发展的实际过程极为不同的结果。

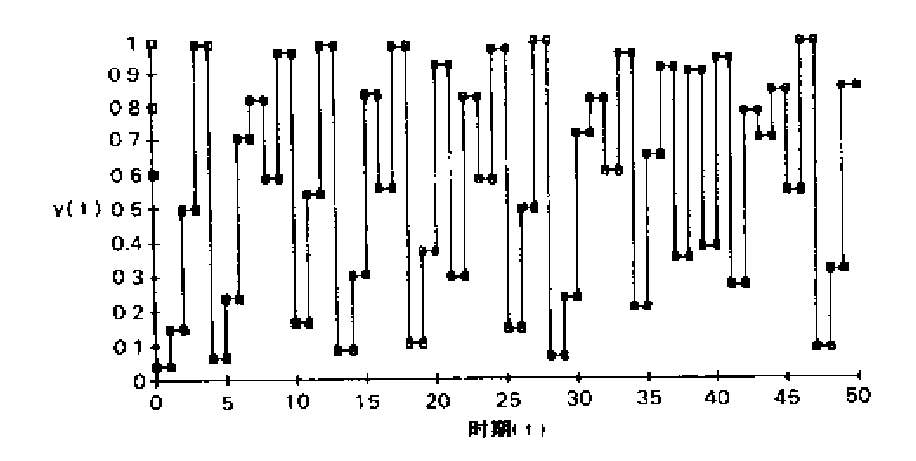


图 3.6a 时间路径 $y(t+1)=3.935y(t)[1-y(t)]$
时期为 0—50, $y(0)=0.99$

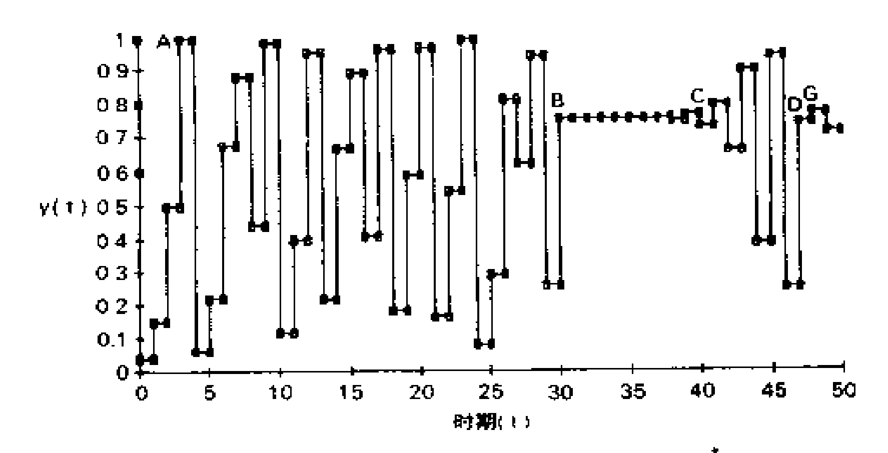


图 3.6b 时间路径 $y(t+1)=3.934y(t)[1-y(t)]$
时期为 0—50, $y(0)=0.99$

3.8 时间路径中的突发质变

图3.6b也显示了另一种刻画混沌轨迹的特征，该特征是在时间路径中引入急剧的、不可预见的性质突变的倾向。从该时间路径的初始点A到大约25个时期以后的B点之间，存在着一个完全同质的(略有些不平衡的)周期区域，其振幅似乎没有表现出明显的变动趋势。然而，此后时间路径突然变得几乎呈水平状，在10个时期(从B到C)中周期行为几乎完全消失。在那一点上(C点)，完全没有料到的是，几个相当剧烈的振荡不知道从什么地方又冒了出来，并且在到达D点右侧后突然再次变得十分和缓。即使我们知道从A点到B点之间的25个时期区间的最精确、最完整的数据，我们也很难想象，任何直接或间接依赖于外推法的预测手段能够由此准确地预测出B点和C点间这一时期内的情况。

图3.6b表明，这条时间路径的基本变量所表现出的混沌行为并非一般地模仿纯随机现象。相反，该时间路径类似于一个决定论模型的行为，但它同时受到非常巨大的随机扰动，这个随机扰动发生于任意确定的区间上。[①]

---

① 匡特教授曾完成了一个模拟实验，在该模拟中，由我们用作实例的基本差分方程产生的一条混沌时间路径的行为，与一条受到较低概率的实质随机扰动、在一个不复杂的决定论区域中运动的时间路径的行为作了对比。谱分析表明，这种混沌序列和受到随机扰动的序列具有极其相似的结果，而后者的特征极不同于我们的方程在ω值离混沌区域不远的条件下导出的时间路径序列所具有的特征。该分析的含义是：在任何特例中，标准统计程序可能无法正确地确定观测值的一个集合是受制于随机扰动，还是由一个完全决定论的但却是混沌的模型产生。这个模拟的详细过程见鲍莫尔和匡特(1985)的论文。

3.9 某些基本的数学结论

对动态系统进行定性分析的现代方法可追溯到庞加莱(1880, 1892)。自从斯梅尔(1967)的经典著作发表后,下面的两个结论变得明确起来,它们是:极其复杂的轨迹(时间路径)很容易出现于某些动态系统中,并且当基础系统发生小的扰乱时,这类复杂的轨迹仍能持续(明确的说明见 Guckenheimer and Holmes 1983)。李天岩和约克的论文(1975)、其他人的论文、以及最近被重新发现的(Stefan 1977)萨尔柯夫斯基(1964)的著作,都极大地促进了与这种复杂动态相关的探索,他们把从简单一阶动态系统中得出的结论应用于不同领域,诸如物理学、生物学或经济学(最近对此作出杰出说明的是格朗蒙特)。

现在,我们要描述一个使用广泛且极为有用的关于混沌动态的结论,我们将它翻译成更容易为经济学家们接受的语言。该定理描述了不同长度的周期的重叠及当每一个整周期数被包括在内时所导致的时间路径的行为。我们也将提到几个困扰着对该定理进行解释的严重错误,并且继续考虑混沌的各种定义。(对数学缺乏兴趣的读者可越过这一节。)

李—约克定理 令 f 为一个连续的差分方程。对于该方程,存在着两个数 $\underline{a}$ 和 $\underline{b}$,如果 $a \leqslant y_t \leqslant b$,则 $a \leqslant y_{t+1} \leqslant b$。现在,如果能够找到一个 y_t 使当 y_t 在连续的两个时期内上升时,它在下一个时期中将降回到其初始值之下,即:

$$y_{t+1}=f(y_t)>y_t,\ y_{t+2}=f^{(2)}((y_t))>y_t$$

$$\text{但}\ y_{t+3}=f^{(3)}(y_t)\leqslant y_t \tag{7}$$

那末两个主要结论如下：

(1) 对于任何整数$k>1$，在$\underline{a}$和$\underline{b}$之间至少存在着一个初始点y_0，使随后的时间路径y_t具有k周期的特征。

(2) 在$\underline{a}$和$\underline{b}$之间的区间中存在着初始点的一个不可数集S，使得如果初始点x_0和y_0均处于S中，则①在将来的某一时点t上，(x_t-y_t)的差将任意地接近于零，即这两条路径将(暂时地)尽可能彼此靠近；②然而，在某个彼此接近的区间之后，这两条时间路径必定再次分开；③此外，没有任何一条这种类型的时间路径会永远渐近地收敛于任何周期性的时间路径，并且一条发源于S的时间路径不会渐近地收敛于任何发源于S以外的时间路径。

当依赖于所选择的初始条件的一个差分方程要么产生如上面(1)中那样的、具有任何长度的周期的时间路径，要么产生上面(2)中所描述的非周期时间路径时，它可以被说成是“产生了混沌动态”。这种混沌定义可能会令人误解。正如已经指出的那样，这种非周期轨迹——李—约克定理显示了它们的存在——通常可以由不可数的无穷不同初始条件引致。粗略地讲，这么做会使在初始条件范围内的这个区域显得“非常巨大”。但是，这些初始点的勒贝格测度可能为零，即对于某些混沌模型，其行为在“几乎所有地方”可能是非混沌的。此处应该注意的是：勒贝格测度被定义为使任何区间的测度等于其长度，而“孤立的”点的一个集合——即使这些点的数目是无穷的——具有零勒贝格测度(即这些点能够用其总长度是任意小的区间的一个可数集来覆盖)。

在某种条件下，时间路径至多具有一个稳定的周期轨道，除了一个勒贝格测度为零的、足够小的集合以外，它将吸引所

依赖是否意味着“可观测的混沌”。在某些情况中也有可能显示出：对于 S 中的几乎所有初始点，频率分布是相同的。①

有待解决的关键问题是：产生“可观测的混沌”或奇怪吸引子的这类差分方程本身是否构成一个巨大的集合。特别是对我们用作实例说明的差分方程族(1)来说，问题在于产生可观测的混沌的 ω 值的集合是否是巨大的。雅各布森(1981)指出，该集合具有正(勒贝格)测度。但是，这并不能排除在另一种定义——S 可能不包含任何(完全的)区间——条件下，集合 S 很小的可能性。

如果人们转向分段线性的且具有倒“V”字形状的差分方程，则情形大不相同。如果该图无论何处斜率的绝对值都大于1(除了顶点之外，因为该点的斜率没有定义)，则很容易得出：该方程将从几乎所有初始点中产生非周期的时间路径，并且其所有周期的时间路径将是不稳定的。此外，就刚刚定义的那种意义而言，在这种情况中的混沌一定是可观测的。如果我们使这样一种差分方程发生轻微的扰动(即改变其参数值)，而方程定义域内所有点(除了顶点以外)的斜率绝对值仍旧大于1，则这些特征显然仍是成立的。伍德福德提供了一个证明是能够产生可观测的混沌的经济均衡模型——在扰动的情况下，其混沌特征也十分显著。

---

① 然而，由于 y_{t+1} 的值完全由一个决定论系统中的 y_t 确定，因此运用这种频率分布进行预测是毫无用处的。(由 y_t 给定的 y_{t+1} 的条件分布是退化的。)以某种方式利用这种频率分布的一个线性随机差分方程也不可能提前某些时期对 y 作出预测。因此，出于建模的目的，我们应该抵制那种竟然将非线性系统的动态看作是由一个简单的随机系统产生的诱惑。

3.10 更高阶和多变量系统中的混沌

大量的经济模型运用 n 个联立的一阶差分方程把 n 个时期变量的一个向量 $(x_{1t}, x_{2t}, \cdots, x_{nt})$ 与其随后时期中的值 $(x_{1t+1}, x_{2t+1} \cdots x_{n+1})$ 连结起来。另一些模型使用了单变量的 n 阶差分方程 $y_t = f(y_{t-1}, \cdots, y_{t-n})$，如极为著名的萨缪尔森加速数—乘数周期模型。有关 n 个联立一阶系统（即关于变量是 n 维的系统）的混沌行为的任何定理必定也适用于一个单变量的 n 阶方程。其原因是众所周知的，即这样一种 n 阶方程能够很容易地被改写成 n 个变量的联立一阶系统：

$$x_{1t} \equiv y_{t-1}; x_{2t} \equiv y_{t-2}; \cdots, x_{nt} \equiv y_{t-n}, y_t = f(x_{1t}, \cdots, x_{nt})$$

本文中所涉及到的几乎所有的混沌经济模型都运用了一维（即单变量一阶）差分方程。但也有例外，贝纳比和戴（1981）研究了内生选择的动态，并提出了有关在静态条件下产生 n 种商品向量序列的混沌选择的偏好条件。他们运用了 P·戴蒙德（1976）的结论——他对李天岩和约克（1975）提出的关于 n 维（n 变量或 n 时期滞后）情况的命题进行了归纳。莱布热（1978）和马罗托（1980）也做了进一步的归纳。然而，这些结论与李—约克定理的结论一样，都受到了相同局限性的困扰。虽然他们暗示存在着初始值的一个无限的（且不可数的）集合，它产生一条复杂得无法展示出任何周期（它是“非周期的”）的时间路径，但是，他们并没有指出该集合必定大得足以具有一个正勒贝格测度（粗略地说，该集合不具有足够的点来“填充”一条线段或一个区域）。这些结论并不易于使用，至今它们的应用仍受到限制。他们仅提供了如下猜想：

在较高阶系统中，产生混沌的充分条件要比在一阶系统中“更容易”满足；也就是说，混沌“更可能”发生于较高阶的系统中。

3.11 在经济学中是如何产生山丘状相图的

正如我们已经看到的，建构一个可以产生混沌行为的模型的关键是生成一个山丘状的相图，至少在该模型是建立在一个一阶差分方程基础之上的时候是这样。因此，我们必须指出，这种山丘状的动态关系如何能在经济学中出现。我们来简要地讨论几个具有这种特征的模型。我们首先从一个过于简化的——也就是说最简单的——例子开始，但是在该例子中，存在着一种与我们所感兴趣的相曲线形状非常明确的联系。这个例子的缺陷在于它假定的厂商信奉单凭经验办事的非理性(并非完全不现实的)程度，这一问题并未影响本文开始所涉及的讨价还价模型及此后的一个模型。

考虑一个厂商的利润和它的广告预算决策之间的关系。假定没有任何广告支出则该厂商不能销出任何商品。随着广告支出的增加，净利润总额先是增加，然后逐渐停滞，最后开始下降，这就得到了传统的山丘状利润曲线。如果P_t代表时期t中的总利润，y_t为广告支出总额，则为了实例说明，P_t能够被看作是遵从表达式$P_t=ay_t(1-y_t)$。此外，如果厂商按一个固定的比例b将本期利润用于下一期的广告支出从而使$y_{t+1}=bP_t$，则在$\omega=ab$条件下，第一个方程立即可转换成我们的基本混沌方程(1b)。

在这种情况中，相图的斜率由正值转向负值的原因是显而易见和众所周知的。即使广告支出的增加总是提高总收

的成本最终以与生产率的增长不成比例的速度增加，则关系 $\Pi^*_{t+1}=f(\Pi^*_t)$ 显然能够生成这种与一个混沌区域相一致的山丘状相图。

能够生成周期或混沌动态的另一种模型是一个标准的索洛型增长模型，在该模型中源于工资的储蓄倾向低于利润的储蓄倾向。我们假定：在低水平的资本存量 K 上，我们能得到一个递增的边际资本收益，且劳动对资本的替代弹性开始时是较低的；但收益递减最终会出现且劳动对资本的替代弹性会提高。因此，利润总额相对于工资总额来说，在开始时是增加的，但是不久，不仅相对于工资来说利润下降了，甚至其绝对值也是下降的。这立即就能在 K_{t+1} 和 K_t 之间生成一种山丘状的关系；随着 K_t 的递增，先是引起储蓄的递增，然后随着利润的下降，最终又降低了储蓄。

我们能够从利润和工资的储蓄倾向是相同的、但这种倾向随着社会的逐渐富足而下降的这样一种模型中得出类似结果（对于一个公式化的叠代模型来说，贴现因子随财富增加。见 Benhabib and Day 1980）。

已经提出的关于建构简单的混沌宏观模型的可能性的问题是与探讨在各个时期都充满乐观看法且具有完全预见能力的经济活动主体的长期存在和市场出清这类问题相一致的。许多关于周期和混沌的宏观经济学文献都使用了生命周期模型。这表明，前面提到的这类模型可以产生混沌，仅仅是由于它们涉及到这样一种经济活动主体，其平均生命期小于许多周期的持续时间，从而防止了他们通过套汇活动来消去这些周期。大量的研究（Benhabib and Nishimura, 1979, 1985, 1989; Boldrin and Montrucchio, 1986; Deneckere and Peli-

kan, 1986; Woodford, 1987)表明，这样一种展示出周期和混沌的模型很容易建构。例如，只要每一个时期中相对价格变动的百分比不超过贴现率，则贴现行为可以使相对价格循环运动。要么是储存成本，要么是不完全的金融市场可以防止完全的套汇行为，甚至在理性预期的条件下也允许周期或混沌的持续存在。

3.12 混沌存在的经验证据

有关混沌是否发生于经济现象中的证据迄今为止仅仅是示意性的。

布罗克(1986)曾运用某些新方法(也见Brock and Dechert, 1986)来检验一个特殊的时间序列是最有可能由一个随机系统生成，还是最有可能由一个混沌的(占支配地位的)、定义为一个产生复杂动态的决定论系统(或许具有微弱的随机影响)的区域生成。布罗克和塞耶斯(1985)曾运用这些方法研究了大量宏观经济序列。虽然这种证据是不充分的，并且有些缺乏说服力，但我们似乎有理由得出下面这种暂时性的结论：在经济计量分析中应用具有随机扰动的简单线性系统，在某些特殊情况中可能是不适当的，容易导入歧途；而非线性系统可能更合适些。

另一方面，即使混沌理论的绝大部分应用于宏观经济学中，但宏观变量可能并非最有希望找到混沌的地方。相反，从混沌理论的逻辑上看，人们可能猜想：混沌动态更有可能影响非加总的变量(诸如生铁的生产)而不是一个加总的序列(诸如GNP)，尤其是当微观变量内在地受制于把变量的未来值

与经济计量估计中选择一个模型的结构时所遇到的没有什么不同。第二，这种可实现的观测可能并不提供有关基础系统变量的信息，而只能提供有关这些变量的某一函数的信息。这样，如果该系统是一个 n 变量（向量 x_t）的差分方程，则我们也许仅能观测 x_t 的一个函数 $y_t=h(x_t)$，其中 y_t 是一个单变量——它或许像GNP 那样是一个加总的时间序列。所以，该系统不能被化简为一个单变量的差分方程，因为每一个 y_t 对应于向量 x_t 的许多值。

假使前面的考虑成立，那么将本质上是决定论的动态从基本上由随机要素控制的动态中区分出来的问题就变得很困难，如果不是模棱两可的话。解决这类难题的高级方法已经找到了。它们包括确定一个特定的时间路径是由一个稳定且随机的系统生成，还是由一个混沌但又是决定论的系统生成的方法。在此，时间路径在极限范围内所趋向的点集的“维数”被证明是一种有用的判断标准。为了使读者理解这种说法，特别需要指出的是：在稳定的随机情况中，系统在未来某一时点上的状态是一个随机变量——其未来的极限可能事前仅仅只能由一个频率分布来描述。结果是，在这种随机情况中，只有一个闭联集(continuum)才能充分包含时间路径所有可能的极限点。相反，正如前面的说明所显示的那样，一条决定论动态系统的轨迹可能收敛于有限数目的点（例如一个平稳点或一个周期）。此外，它也可能沿一条混沌路径运动或者收敛于一个混沌集合（一个“奇怪吸引子”）。在后面这两种情况中，尽管轨迹不是由有限数目的点构成的，它仍旧能够从一个闭联集中被区分出来，因为粗略地讲，前者包含“较少的点”。（我们马上就对这一点做出较为详细的解释。）

在时间序列数据的有限的(但是巨大的)且加总的集合基础上寻找经验地区分这种基本机制是否是决定论的方法，是基于一个“奇怪吸引子”的“维数”和由稳定的随机动态系统生成的一个平稳分布的“维数”之间的差别。如果定义恰当的话，后者的“维数”能表示出是无限的。塔肯斯(1985)、普罗卡恰和格拉斯博格(1985)及其他人提供了几个关于“维数”的定义，它们适用于对一个有限但巨大的数据集合的检验。关于他们这些人的方法的描述和应用，可参见布罗克(1986)，布罗克和德克特(1986)，沙因克曼和勒巴龙(1986)，布罗克和塞耶斯(1986)，及布罗克、德克特、沙因克曼(1986)等人的文章。

在图 3.2 的帮助下，我们能够指出这种对一个时间路径是混沌的还是随机的进行经验检验的维数研究方法的逻辑。我们刚才已经看到，从图 3.6b 的混沌时间路径中依据相应的 y_t 来标绘 y_{t+1} 的逐次值的这一过程是如何在图 2 的相曲线上给出一系列点的。所以，即使在极限范围内这些点会填满整条相曲线，但它们仍仅仅形成一个一维集合——两维空间中的一条曲线。

相反，如果时间路径受到随机影响，则刚刚完成的标绘过程显然要产生一个散落于抛物线附近的点的集合——其至多具有能够被一个连续的二维区域所覆盖的面积。这表明了为什么混沌行为是与一个低于随机行为的维数的点集相联系的，并且也暗示了维数在原则上如何能被用来从其他情况中辨别出一种情况。

上面的讨论留下这样一个难题，即如何从经验上对混沌影响和随机影响均存在的任何混合情况进行区分。y_t 的这种决定论的结构可能包含一条具有一个低维数极限(也许对

应于一个"奇怪吸引子")的时间路径，并且这种决定论的部分相对于独立分布的随机振荡（independently distributed random shocks）序列的变化程度可能很大。由该系统的决定论部分产生出一个"奇怪吸引子"的可能性，在某些噪声叠加于其上的条件下被称为"嘈杂的混沌"。本-米兹拉奇(1984)、布罗克和德克特(1986)分别给出了识别时间路径的噪声构成与其决定论部分相比"较小"这种情况的方法。

现实中所使用的数据集合必然是有限的这一事实使上述探讨复杂起来。一个线性随机差分方程系统能够产生一个"有限维的"吸引子，如果其随机构成是充分小的话。因此，我们可以提出如下结论：这种基础动态系统是严格决定论的。(关于数据样本的有限性所产生的困难的讨论，见 Ramsey and Yun 1987)

有一种很有发展前途的辅助校验方法，可以检验这种基础系统在平均意义上是否"稳定"。这样一种检验力图确定，由一种既定关系产生的、但却具有不同初始条件而开始时彼此靠得很近的轨迹，是否一直彼此保持接近；如果这些轨迹是混沌的，则它们就不会如此。估计这类轨迹的平均发散速度的方法也被设计出来。一个正的发散速度被看作存在一个奇怪吸引子而不是存在一个稳定但却随机的动态系统的证据，后者的稳定性抑制了其变量轨迹的显著发散。

目前，区分一条时间路径是由一个稳定的线性随机系统产生、还是由一个产生混沌动态的决定论的非线性系统（或许也包含着微不足道的随机构成）产生的方法仍是相当新的。这些方法能否进一步发展以克服"小"数据集合所引起的难题，还有待于观察。

虽然本文的讨论必定是不全面的，但它会提供给读者某些关于目前正运用于经济学混沌现象的经验研究的方法的印象。

傅　琳

译自《经济展望杂志》，1989年第3卷第1期

4 宏观模型中的混沌动态与分岔

米夏埃尔·J·施蒂策*

提要

由霍韦尔莫[①]提出的一个决定论的、连续时间的非线性宏观模型完全具有一个离散时间形式的定性动态行为。最近发展起来的符号动力学(symbolic dynamics)和遍历理论(ergodic theory),为分析由单参数族的(one-parameter family)一阶决定论的非线性差分方程所引起的行为,提供了一个简单有效的手段。在本文中,我提出了一个复杂周期的和随机"非周期的"轨道结构——它依赖于一个关键的结构参数,它与霍韦尔莫的连续时间形式中缺乏这种复杂性的状况形成了对照。这里将讨论一下动态经济模型化的几种含义。

---

* 米夏埃尔·J·施蒂策 (Michael J. Stutzer),美国联邦储备银行、明尼阿波利斯分行的经济学家。——译者

① 霍韦尔莫(Haavelmo),瑞典经济学家,1990年诺贝尔经济学奖获得者。——译者

考虑由霍韦尔莫(1954)分析过的下列简单宏观经济增长模型:

$$\dot{N}/N=\alpha-\beta N/Y=\alpha-\beta/(Y/N),\ \alpha,\beta>0 \quad (1)$$

$$Y=AN^{a},\quad A>0,\quad 0<a<1 \quad (2)$$

其中,N和 Y是时间函数。小圆点("．")表示对时间的导数。在劳动力 N的收益递减条件下,由固定的产出弹性 a从方程(2)可得到实际产出 Y。在方程(1)中,N被看作是按一定比率 α 减去一个依赖于人均产出倒数的比率 β 的自发增长。因此,N的增长率随人均产出而增加,并受到 α 的上限约束。将(2)式代入(1)式,得:

$$\dot{N}=N[\alpha-\beta N^{1-a}/A] \quad (3)$$

将(3)式两边除以 N,我们发现增长法则显现为大家熟知的逻辑斯谛曲线(S 型)形式的普遍特征。库兹涅茨(1933)在工业增长研究中、格里利切斯(1957)在技术扩散研究中,克莱因和普雷斯顿(1969)在对卡尔多贸易周期的模拟中都使用了这类形式。这在计量经济学的文献中有过概括性论述,称为"逻辑斯谛"模型(Maddala 1977)。逻辑斯谛法则在生物种群数量的增长研究中也起着重要的作用。

霍韦尔莫求解了方程(3),得到了如下解:

$$N(t)=[1/A((AN(0)^{a-2}-\beta/\alpha)e^{\alpha(a-1)t}+\beta/\alpha)]^{1/(a-1)}$$

此动态行为是相当简单的。如果初始条件 $N(0)>(<)(\alpha A/\beta)^{1/(2-a)}$,则无论 N还是 Y均将单调递减(递增),并分别接近其唯一的稳态值 $(A\alpha/\beta)^{1/(1-a)}$和 $A(A\alpha/\beta)^{a/(1-a)}$。图 4.1 描绘了该解的情况。

为了用周期数据进行经济计量估算,或为了便于在非线

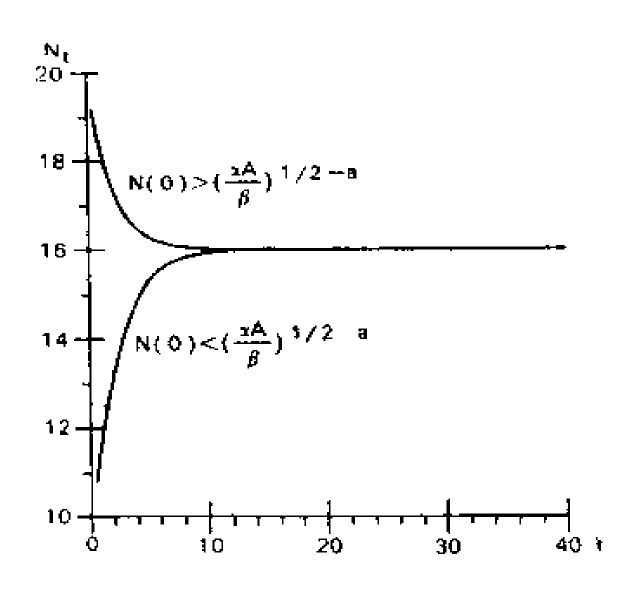


图 4.1 连续时间模型总是单调地接近于稳态

性微分方程解中由那些未处理的解来分析问题，我们要考虑离散时间的逻辑斯谛模型。通常的作法是用一阶差分替代时间导数。在(1)式和(2)式中进行这种替代，可得

$$(N_{t+1}-N_t)/N_t=\alpha-\beta N_t/Y_t \tag{1'}$$

$$Y_t=AN_t^{a} \tag{2'}$$

将(1′)式和(2′)式合并，得

$$N_{t+1}=N_t[(1+\alpha)-\beta N_t^{1-a}/A] \tag{3'}$$

为了简化记法，令 $N_t=(A(1+\alpha)/\beta)^{1/(1-\alpha)}x_t$ 来表示(3′)式中变量的一个正的线性变化，得

$$x_{t+1}=(1+\alpha)x_t[1-x_t^{1-a}]=F(x_t;\alpha,a) \tag{4}$$

当变量 x 的变化恰好与测度 N 的变化尺度一样时，我们能在不损失其普适性的条件下分析(4)式的动态。这样做时，我们会发现离散时间形式(3′)与连续时间模型(3)在定性特征上有着极大的差异，系统不再总是单调地接近某个稳态。

当自发增长率 α 超过某一值时，系统不再单调地接近某一稳态，而是振荡地接近。如果 α 再增加时，这个稳态变得不稳定，且附近的点也不稳定。若 α 再进一步增加，我们能找到一个 α 值，称之为α_k ，对于任意的 k，在α_k 时，该系统将具有时期 k 的周期。同样，存在着一个数目不可数的初始条件，由此出发，轨迹以某种有界和非周期的形式波动发散开来，这与某些随机过程的状况是无法区别的！这种行为被授予“混沌的”的称号；对于 $a=0$ 的情况，首先由李天岩和约克(1975)发现，本文的讨论主要依赖于他们的、以及梅(1976)和古根海默(1977)的论述。

下列结论可在随后的详细分析中得到：

(1) 一个连续时间系统的离散时间形式不能仅靠假定由一阶差分替代导数来得到。在西姆斯(1971)、萨金特和汉森(1979)、格雷夫斯和泰尔泽(1968)等人的文献中，分别给出了这一结论的确凿证据。在本模型中，甚至连续时间系统和离散时间系统的定性特征也像白昼与黑夜那样不同。如果我们不能确定哪一个表示“真实”系统，那么这些结果强调了时间定义域和“单位时间”长度的选择对确定模型的定性性质是十分重要的。

(2) 简单的非线性一阶决定论的差分方程可展示出混沌的、貌似随机的涨落——它可能被错误地归因于外生变量的影响，或假定是随机的内生变量的影响。这种现象不存在于决定论的低阶线性差分方程中。涨落的数学模型化相当典型地导致了附加的随机项(如白噪声)——其涨落是由系统的其余部分随时间来扩散的。我们的结果表明：一定存在着一个比仅仅期望复制“现实的”轨迹能更好地引入这种随机影响的

基本方法。①在宏观经济现象的线性差分方程模型中，将似乎可行的、理论上合理的非线性特征引入结构方程也可以解释所观测到的涨落，它甚至优于附加随机变量的方法。这种可能性更有可能存在于下面的这种模型中：即仅仅出于分析上简便的考虑，线性通常被作为一种特定的合理假设。通过利用具有更高阶的滞后与超前的线性模型来解释涨落的做法也受到这种批评。

(3) 我们可以从统计方面更好地描述这种有界的、非周期的、"混沌"的涨落，如通过在一个长的时间跨度上计算轨迹在即定区间内占用的时间份额。这种分析方法是可能实现的，但它要求用大多数经济学家不熟悉的从遍历理论和拓扑动力学中迅速发展出的新技术。因此，当经济学家们花费大量时间来学习寻找现实世界的混沌中的有序的方法时，掌握找出源于现实世界的有序中的混沌的技术可能也是必要的。

(4) 结构参数中较"小"的变化能导致系统行为中巨大的质变。当对于大多数 α 值来说(3′)式是斯梅尔(1967)意义上的结构稳定时，实际上 α 的扰动范围——它将保持该系统解的定性特征——可能是相当小的。

(5) 非线性低阶系统的演化也能受到系统初始条件的巨大影响。在建构模型的过程中，这种相关性经常被看作是要避免的情况。毕竟，系统一旦开始演化——无论在什么时候——人们怎么能知道主要条件是什么呢？在建立时间序列模型中，这种理由经常作为证明平稳性假设的合理性的基础。这并不是忽视系统性质依赖于初始条件这种非常现实的可能

① 见 F. Adelman 和 I. Adelman(1959)的论文。

性的充分理由。更确切地说，一个更为详尽地预测初始条件的可能合理值的理论是必不可少的。霍韦尔莫(1954)为这种观点作出了精彩的辩护，他指出：结构参数和初始条件之间的差异依赖于一个模型所提出的问题的详尽程度。例如，他指出，如果人们仅仅想要知道一个以固定比率增加的投资要多久才能翻一番，则关于增长率(一个"结构参数")的知识就足够了；然而，如果人们也想知道在这一时期以后他会有多少钱，则关于初始投资量(一个"初始条件")的知识也是必不可少的。

(6) 最后提及的这两种影响(即结构参数和初始条件的较小变化引起的质变)，再加上对这些变量测量出现误差的可能性，使得人们对预测和控制这种非线性系统的能力产生疑惑。因此，即使模型对现实的刻画是精确的，但在实践中预测和控制系统仍是不可能的，因为存在着不可避免的测量误差。

4.1 定义

根据李天岩和约克(1975)的讨论，考虑一个一阶差分方程 $x_{t+1}=F(x_t)$，其中 $F: J\to J$ 是连续的映射，J 是实数范围内的一个有界闭区间。用 $F^n(x)$ 表示 F 自身的 n 重合成，用 $F^0(x)\equiv x$ 表示恒等的映射。

对于所有(某些) $1\leqslant K<n$，当且仅当 $F^n(p)=p$ 且 $p\neq(=)F^K(p)$ 时，点 $p\in J$ 被称为一个具有周期 n 的非退化(退化)的周期点，或一个 n 周期点。对于某些 $n\geqslant 1$，如果点 $p\in J$ 是一个 n 周期点，则它被称为**周期的**。1 周期点被称为**稳态**、**均衡态**、或 F 的**不动点**。

的 α 将对于每一个 $0<a<1$ 受到限制，从而使 F 映射区间 $J=[0,1]$。因此，假设

$$F(x;\alpha,a)\leqslant 1 \tag{6}$$

或从(4)式按其最大值计算 F，

$$\alpha\leqslant[(1/(2-a))^{1/(1-a)}(1-1/(2-a))]^{-1}-1=\alpha^{*} \tag{7}$$

与不同 a 值相对应的 α^{*} 值被列于表 1 中。

(4)式的定性特征可通过相应 a 的任何特殊值，比如说 $a=\frac{1}{2}$ 对该式进行考察而得出。没有任何一种定性特征受 $0<a<1$ 这种特殊选择的影响。这个结论随着下面的分析将变得清晰起来。

最大的 α，使 F: $[0,1]\to[0,1]$ 表 1

a	α^{*}
0.1	3.307619
0.25	3.920707
0.5	5.750000
0.75	11.207031
0.9	27.531167

这样，在本文的剩下部分中，我们考虑单参数族的一阶差分方程(绘于图 4.2 中)

$$x_{t+1}=(1+\alpha)x_t(1-\sqrt{x_t})=F(x_t;\alpha),$$
$$0\leqslant\alpha\leqslant 5.75,\qquad x_0\in[0,1] \tag{8}$$

对于每一个 α 值，通过在图 2 中确定 $F(x_t;\alpha)$ 曲线与 45°线的交点就能找出均衡点。对于每一个 α 值，要注意存在着两个均衡点：$\bar{x}=0$ 和 $\bar{x}=(\alpha/(1+\alpha))^2=\bar{x}(\alpha)$。后者可通过对交点解析来得到。点 $\bar{x}=0$ 显然是不稳定的，并排斥其邻近点。后一点 $\bar{x}(\alpha)=[\alpha/(1+\alpha)]^2$ 的局部稳定性能通过(8)式的线性化来确定。因此，我们得到：

$$F'(\bar{x};\alpha)=1-\frac{1}{2}\alpha=\lambda(\alpha) \tag{9}$$

众所周知，特征值 $\lambda(\alpha)$ 决定了 $\bar{x}$ 的局部稳定性。当 $0<\lambda(\alpha)<1$ 时，$\bar{x}$ 以一种单调的指数形式吸引邻近点；当 $0>\lambda(\alpha)>-1$ 时，$\bar{x}$ 以一种(阻尼)振荡方式吸引其邻近点；当 $\lambda(\alpha)=-1$ 时，$\bar{x}$ 既非稳定也非不稳定，既不吸引邻近点也不排斥邻近点；最后，当 $|\lambda(\alpha)|>1$ 时，$\bar{x}$ 是不稳定的并排斥邻近点。对(9)式的考察显示这些行为分别发生在当 $0<\alpha<2$、$2<\alpha<4$、$\alpha=4$，以及 $4<\alpha<5.75$ 时。图 4.3 说明了这一结果，其中 $\lambda(\alpha)$ 是在 $\bar{x}(\alpha)$ 处 F 曲线的斜率。

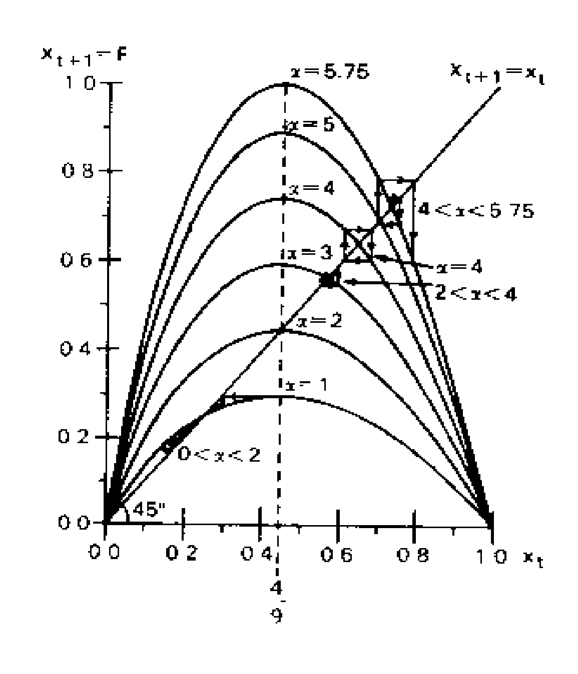


图 4.3　均衡的稳定性

当稳态 $\bar{x}(\alpha)$ 整体是稳定的时候，即当 $\alpha<4$ 时，起始于任何一点的轨迹总是趋于这个稳态的。在这些情况中，解对参数 α 性质上的依赖能通过将一个 α 值所得到的稳态与另一个 α 值所得到的稳态相比较的方法而近似得出。这种**比较静态**分析可运用关系 $\bar{x}(\alpha)=(\alpha/(1+\alpha))^2$ 来完成。

因为 $\bar{x}'(\alpha)=2\alpha/(1+\alpha)^3>0$，故对于足够大的 t，α 的增加可以导致 x_t 的增加。当 $\bar{x}$ 是不稳定时，即当 $4<\alpha<5.75$ 时，这种分析就没有意义了。

在 $4<\alpha<5.75$ 区域内，如果轨迹并不趋近于 $\bar{x}$，但又受到 0 和 1 的界限约束，那么这些轨迹趋于何方呢?找出该问题答案的首要任务是考察(8)式，当 α 处于该区域时，考察将邻近点吸引入规则的有界振荡模式中的那些稳定的周期轨道发生的可能性。这一答案现在已经找到了。

4.3 周期轨道结构：2-周期的循环及其谐波

当 α 超过 4 时，不稳定均衡点分岔为周期 α 的两个稳定点、即进入长度 α 的一个稳定周期轨道。这可通过考察 F^2 而得到。对于非退化的不动点而言，它是 F 的第二次叠代，即并非 F 的不动点(均衡点)，而是 F^2 的不动点。

对于 $\alpha=4.2$，图 4.4 显示了 $F^2(x;4.2)$ 的两个非退化不动点，记作 $\bar{x}_1{}^2$ 和 $\bar{x}_2{}^2$，以及退化的不动点 $\bar{x}$。对于 $\alpha=3.9$ 及所有 $\alpha<4$，2-周期轨道并不出现。对该图的考察显示出 $F^2(\bar{x}_1{}^2,4.2)$ 和 $F^2(\bar{x}_2{}^2,4.2)$ 的斜率均小于1，这意味着周期轨道是稳定的。

图 4.4 也显示出这两个斜率是相等的，事实上的确如此，正如通过链式法则(chain rule)(Samuelson 1972)的一个简单应用所能证明的那样。用 $\lambda^2(\bar{x}^2{}_i(\alpha))$ 表示 $F^2(\bar{x}_i^2;\alpha)$ 的斜率，当 $F(\bar{x}_i^2;\alpha)=\bar{x}^2{}_j$ 时，计算

$$\lambda^2(\bar{x}_i^2(\alpha))=\frac{dF^2(\bar{x}_i^2;\alpha)}{dx}=\frac{dF(F(\bar{x}_i^2;\alpha))}{dx}$$

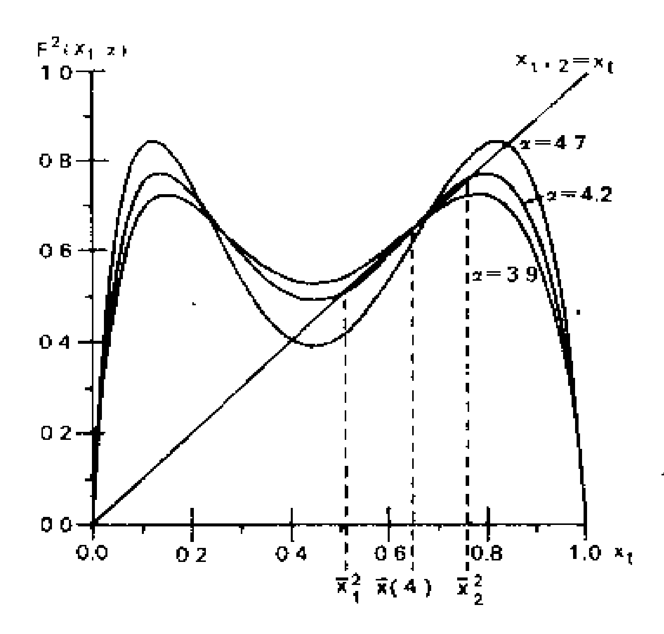


图 4.4　$\bar{x}$ 分岔为一个2-周期轨道 $\{\bar{x}_1{}^2, \bar{x}^2{}_2\}$

$$=\prod_{i=1}^{2}\frac{dF(\bar{x}_i^2;\alpha)}{dx},\quad i=1,2 \tag{10}$$

对(10)式的直接检验证明了 $\lambda^2(\bar{x}_1{}^2(\alpha))=\lambda^2(\bar{x}_2{}^2(\alpha))$。这样，人们仅需要检验在这两个周期点上的 F^2 的斜率就能确定包含着这两个周期点的周期轨道的稳定性。

运用(10)式对 $\lambda^2(\bar{x}(\alpha))$ 进行估值(在均衡点 $\bar{x}$ 处的 F^2 的斜率)，计算

当 $\left|\frac{dF}{dx}(\bar{x}(\alpha))=\lambda(\alpha)\right|\gtreqqless 1$ 时，

$$\lambda^2(\bar{x}(\alpha))=\frac{dF}{dx}(\bar{x}(\alpha))^2\gtreqqless 1 \tag{11}$$

因此，当且仅当 $\bar{x}(\alpha)$ 不稳定时，$\lambda^2(\bar{x};\alpha)$ 超过1。正如图

4.4 的几何形状所清晰显示的，为了使非退化的 2-周期点存在，$\lambda^2(\bar{x};\alpha)$必须大于 1。这样，当 $\bar{x}(\alpha)$是不稳定的，即在 $\alpha>4$ 时，两个 2-周期点出现了。该轨迹开始是稳定的，但当 α 的增加超过 4 时，$|\lambda^2(\bar{x}_i^2(\alpha))|$ 也增加[在图 4.4 中比较 $\lambda^2(\bar{x}_i^2;4.2)$ 和 $\lambda^2(\bar{x}_i^2;4.7)$]。对于 $\alpha>4.8$，2-周期循环变得不稳定，而且每一个2-周期点分岔成两个 4-周期点，产生了一个长度 4 的(最初)稳定的周期，记作 $\{\bar{x}_1^4, \bar{x}_2^4, \bar{x}_3^4, \bar{x}_4^4\}$。图 4.5 说明了这一现象。毫不奇怪，为了使 4-周期分岔出现，F^4在 2-周期点 $\bar{x}_1^2(\alpha)$和 $\bar{x}^2{}_2(\alpha)$上的斜率必须大于 1，运用链式法则做一个类似的应用，结果表明，当

$$\lambda^4(\bar{x}^2{}_i(\alpha))=\frac{dF^4(\bar{x}_i^2;\alpha)}{dx}=\frac{dF^2(F^2(\bar{x}_i^2;\alpha))}{dx}$$

$$=\frac{dF^2(\bar{x}_i^2;\alpha)^2}{dx}=\lambda^2(\bar{x}^2{}_i(\alpha))^2>1 \qquad (12)$$

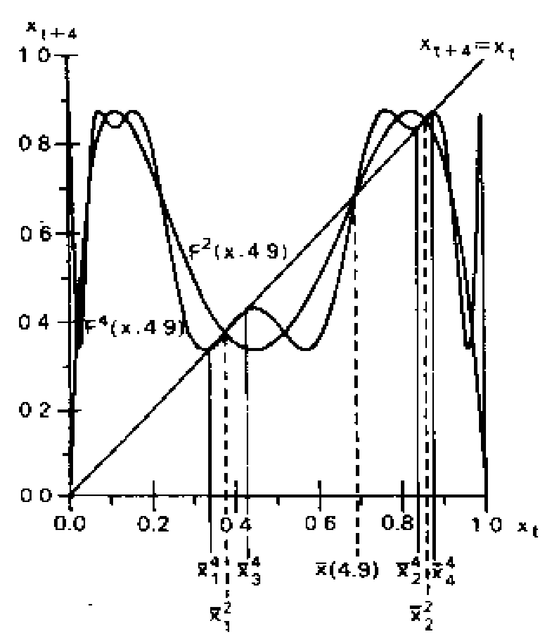


图 4.5 $\alpha=4.9$ 时的4-周期轨道 $\{\bar{x}_1{}^4, \bar{x}_2{}^4, \bar{x}_3{}^4, \bar{x}_4{}^4\}$

时，或当 $|\lambda^2(\bar{x}^2_i;(\alpha))|>1$ 时，4-周期分岔发生。这样，正如前面所提及的，当 α 增至 2-周期轨道变得不稳定的点时，4-周期轨道开始出现。

当 α 递增时，这种权式分岔过程不断继续，产生了长度 $2K(K=2, \cdots, \infty)$ 的非退化轨道。这些轨道被称为 2-周期轨道的谐波。所有谐波都可能在 α 达到 5.540 之前出现，虽然先于该值多少还不知道。当 α 增至极限值，$\alpha_c<5.540$ 时，α 的范围——在该范围内，首先出现长度 K 的一个稳定轨道，然后它变得不稳定并分岔为一个 $2K$-周期的轨道——在长度上是递减的。

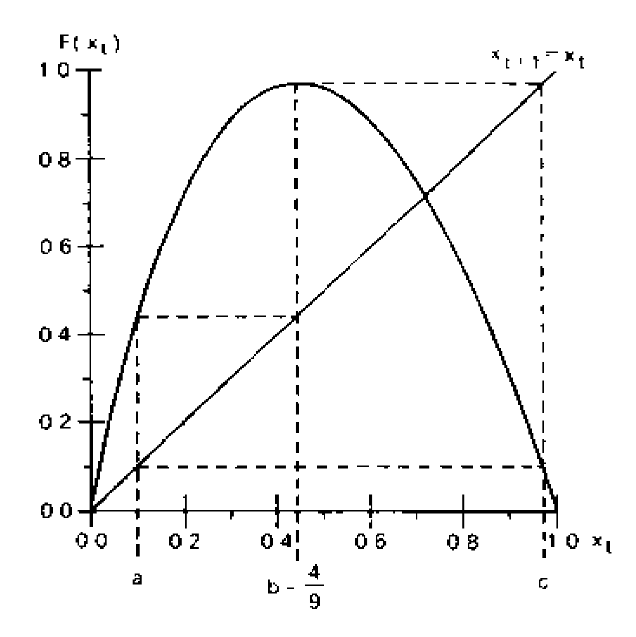


图 4.6　具有 3-周期轨道 $\{a, b, c\}$ 的 $F(x; 5.540)$

$\alpha_c<\alpha\leqslant 5.75$ 的范围被称为混沌区域。当 α 进入该区域，更为奇怪的行为发生了。例如，在 $\alpha\cong 5.540$ 处存在着一个 3-周期的轨道，见图 4.6。此后，该轨道通过刚刚描述过的那种权式分岔过程进入 $3K$-周期 $(K=2, \cdots, \infty)$ 的轨道。

3-周期轨道正如图 4.7 中 F^3 的图示那样，其自身降低到与 45°线相切，因而被称为切分岔(tangent bifurcation)。事实上，李天岩和约克(1975)的一个相当简明的定理已说明：对于会产生一个非退化的 3-周期轨道的任何 $F(x_t;\ \alpha)$，也一定存在所有周期的非退化点，以及存在非周期的、甚至不是渐近周期的点——其轨迹"随机"地游荡于 F 区域内——的一个不可数集合。

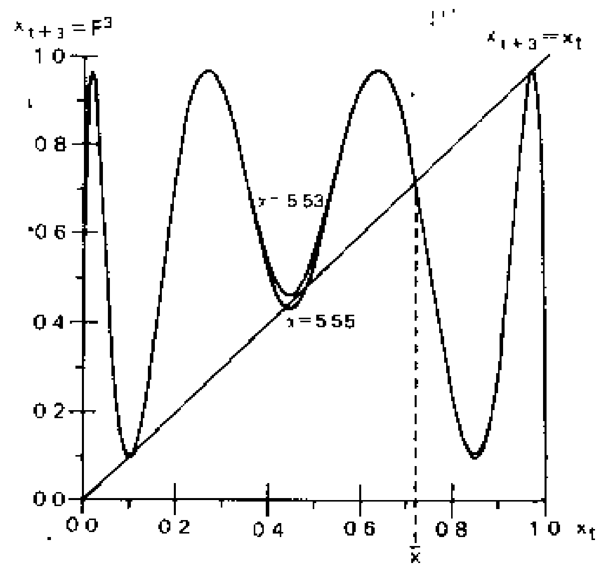


图 4.7　当 α 增至 5.540 时，由切分岔引出了3-周期轨道 {a, b, c}。当 α 进一步增大时，该周期轨道在六个点——在这些点上，$F(x;\alpha)$，$\alpha>5.540$ 与 45°线相交——分岔为两个 3-周期轨道。

定理 I　(李天岩和约克)：令 J 是一个区间且令 $F: J\to J$ 为连续的。假定存在着一个点 $a\in J$，对于点 $b=F(a)$，$c=F^2(a)$，$d=F^3(a)$，满足

$$d\leqslant a<b<c\qquad(\text{或 } d\geqslant a>b>c)$$

则

定理 1：对于每一个 $K=1,2,\cdots$，在具有周期 K 的 J 中存在着一个周期点。

定理 2：存在一个不可数集合 $S \subset J$（不包含任何周期点），满足下列条件：

(1) 对于每一个 $p, q \in S (P \neq q)$

$$\lim_{n\to\infty} \sup |F^n(p) - F^n(q)| > 0 \quad 且 \lim_{n\to\infty} \inf |F^n(p) - F^n(q)| = 0$$

(2) 对于每一个 $p \in S$ 和周期点 $q \in J$，

$$\lim_{n\to\infty} \sup |F^n(p) - F^n(q)| > 0$$

注意：该定理的假设在存在3-周期轨道的条件下将得到满足。

我们不对上述定理作出证明（它仅包含现实分析的基本方法），而将使用的方法并入下面的讨论，即对于每一个 $k = 1, \cdots, \infty$，我们如何计量 K-周期点的数目。作为这种合并的一个副产品，定理 1 将严格地得到证明。

4.4 计算周期点：符号动力学

计算不同周期的周期点数目，以及作为证明定理 1 时的一个副产品的方法，被称为符号动力学，斯梅尔和威廉斯(1976)、古根海默、奥斯特和伊帕克奇(1977)等人已使用该方法计数周期点。下面将使用古根海默等人的研究和计数法。符号动力学在建构由定理 2 精确描述的非周期混沌行为的性质中也是相当有用的，最近兰德(1978)运用它研究了由两个博弈者组成的非合作博弈的混沌性质。

我们来考察一下图 4.6 的映射 $F(x; 5.540)$，并在图 4.8

中作出更进一步的细节描述。从图 4.8 可以明显地看出，$F[a, b]=[b, c]$，$F[b, c]=[a, c]=[a, b]\cup[b, c]$。这一切通过 F 在端点 a、b 及 c 处的行为和运用连续性与单调性来推断其余部分，就可以观测到。

令 $[a, b]=K$，$[b, c]=L$，则

$$F(K)=[F(a), F(b)]=[b, c]=L,$$

且

$$F^2(K)=F(L)=[F(c), F(b)]=[a, c]=K\cup L \quad (13)$$

图 4.8 显示出在 F 与 45°线相交的 L 中的一个均衡点 $\bar{x}$。由于 $F(L)=K\cup L\supset L$，这一事实可以得到强有力的证明。当 L 为一个紧区间(compact interval)，且 F 是连续时，应存在 L 的一个紧子区间，称为 $Q_1\subset L$，使 $F(Q_1)=L$①。在我们的例子中，对图 4.8 的观察结果显示出，由于 $F(b)=c$ 且 $F(q_1{}^u)=b$，所以 $Q_1=[b, q_1{}^u]\subset L$。

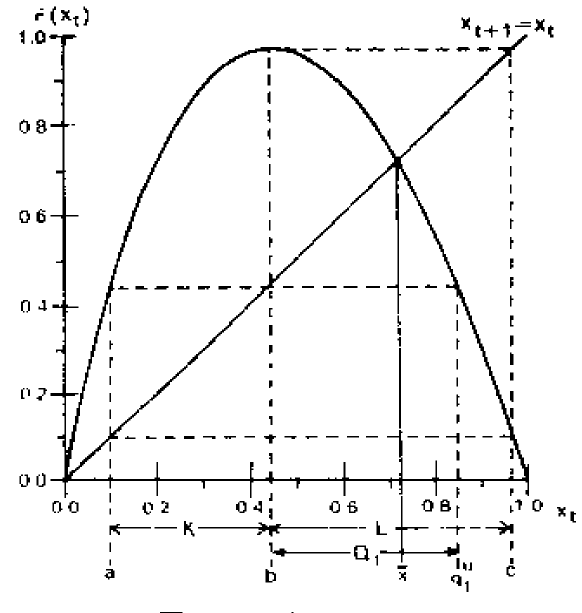


图 4.8　F(x; 5.540)

现在我们将用一个简单的讨论来证明唯一不动点 $\bar{x}\in Q_1\subset L$, $F(\bar{x})=\bar{x}$ 的存在。定义函数 $G(x)$: $Q_1\to L$ 为 $G(x)=x-F(x)$。注意：当 b 是 L 的下限时，$G(b)=b-c<0$, 且 $G(q_1{}^u)=q_1{}^u-b>0$。因此，由于 G 的连续性，一定存在着 $\bar{x}\in Q_1$, 使 $G(\bar{x})=\bar{x}-F(\bar{x})=0$。进而，图 4.8 显示出 F 将 Q 单调地映射于 L。所以，一定存在着唯一的一个 $\bar{x}\in L$。当然，K 中存在不同于原点的非均衡点，当 $F(K)=L$ 且 $K\cap L=b$ 时，它不是一个均衡点。

如果我们希望在 K 或 L 中寻找 2-周期点，注意到

(1) $F^2(K)=F(F(K))=F(L)=K\cup L\supset K$ $\quad(KLK)$

(2) $F^2(L)=F(F(L))\supset F(F(L)\cap K)=F(K)=L$ $\quad(LKL)$

(3) $F^2(L)=F(F(L))\supset F(F(L)\cap L)=F(L)\supset L$ $\quad(LLL)$

(1) 中所含的信息可被归纳为：在 F^2 的作用下，K 自我覆盖一次，即如果初始条件处于 K 中，则在 F 两次叠代后返回 K 的唯一路径是首先行至 L, 然后返回 K(记作 KLK)。类似地，(2) 和 (3) 中所含的信息意味着：在 F^2 的作用下，存在着 L 覆盖其自身的两条路径。一条是起始于 L, 行至 K, 返回到 L(记作 LKL)；另一条是起始于 L, 再行至 L, 然后再停留于 L 中(记作 LLL)。如果我们能证明沿着这三条路径的每一条运动都会存在 F^2 的一个不动点，那么必将存在着三个不同的 2-周期点。当然，其中之一必定是沿着路径 LLL 运动的均衡点 $\bar{x}$(一个退化的2-周期点)。对于 (1) 和 (2) 的情形，我们可以把前面的讨论应用于连续映象 F^2 来找出紧子区间 $Q_1{}^2\subset K$ 和 $Q_2{}^2\subset L$, 使 $F^2(Q_1{}^2)=K$ 和 $F^2(Q_2{}^2)=L$

---

① 该推论在李天岩和约克(1975)的引理 0 中得到了证明。

(见图 4.9)。每一个紧子区间都包含着一个唯一的不动点，分别被称为 $\bar{x}_1^2$ 和 $\bar{x}_2^2$。当它们各自的轨迹沿着不同路径(对于 K 和 L，唯一公共点是 b，它并非是一个 2-周期点)运行时，$\bar{x}^2_1$ 和 $\bar{x}_2^2$ 肯定是有差别的。由于它们都是 2-周期点，非退化 2-周期的循环是 $\{\bar{x}_1^2, \bar{x}_2^2\}$。这样，在 $L\cup K$ 中就只存在一个2-周期轨道。

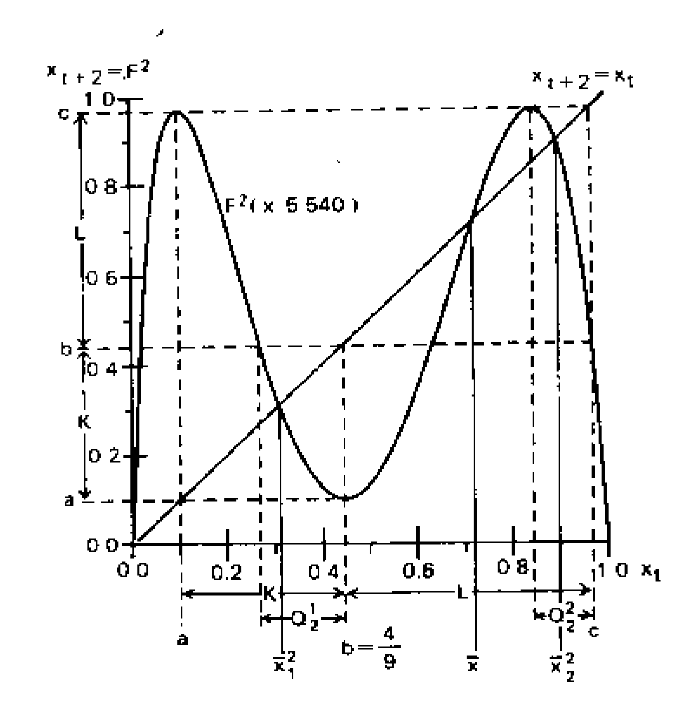


图 4.9　2-周期轨道 $\{\bar{x}_1^2, \bar{x}_2^2\}$ 的存在

古根海默等(1977)运用类似方法研究了更长(将原点排除在外)的周期点的存在和数目。首先，我们通过变换 F 来计数 $L\cup K$ 中长度为 k 的“路径”数。在将系统作为一个具有 K、L“状态”及不变转移律 F 的“马尔可夫链”(Markov chain)来考虑时，这个工作就比较容易完成。该链的“转移矩阵”是:

紧区间时，存在着$(\cdot)$的一个紧子区间 Q_k 使 $F^k(Q_k)=(\cdot)$。则通过与前面给出的相同讨论，在该区间内一定存在一个唯一的不动点 $\bar{x}^k$。当每一点沿着不同路径运动时，这个 k-周期点不同于与长度 k 的所有其他路径相对应的别的 k-周期点。[①]

因此，k-周期点数等于第 k 次黄金分割数 N_k。当然，这些点中的许多是退化的。例如，对于 $k=3$，存在着 $N_3=4$ 个周期点，这四个点是均衡点 $\bar{x}$(沿着 LLLL 路径运动)和构成 3-周期轨道的三个 3-周期点；对于 $k=4$，存在着 $N_4=7$ 个周期点，这 7 个点是：均衡点 $\bar{x}$、两个 2-周期点 $\bar{x}_1^2$ 和 $\bar{x}_2^2$，以及构成一个非退化的 4-周期轨道的四个 4-周期点。不断地计数下去，则显然对于所有 $k=1,\cdots\infty$，至少存在着一个周期 k 的非退化轨道，这样就证明了定理 1。

区间在$[0,1]$中而非 K 和 L 中会怎样呢?它们也会包含周期点吗?为了回答这些问题，将$[0,1]$分割成下列集合：

$$[0,a),\ [a,b]=K,\ [b,c]=L,\ (c,1]$$

对图 4.8 的观察表明，当 $F([0,a))\subset[0,a)\cup K$ 且是单调递增时，在$[0,a)$中不存在均衡点 0 以外的 k-周期点。这样，F 最终就排斥了这个范围内的所有点进入 K，其后果是没有任何一点返回到$[0,a)$，取而代之的是这些点被吸引到 $K\cup L$

---

① 实际上存在着这样的一个点，它初看像是被重复计数，但事实上并非如此。这一点是 $b=K\cap L$，它在下列类型的路径中被计数：(1) $LLKLLKLLKLLK\cdots$，(2) $KLKKLKKLKKLK\cdots$。由于 b 是一个非退化的 3-周期点，它是 F^k，$k=3,6,9,\cdots$的一个不动点。b 的周期轨道属于 $\{b,c,a,b,c,a,b\cdots\}$ 的形式，并属于类型(1)。如果类型(2)的路径也被列入我们的计数中，则将导致过度计数，但这种计数从未列入具有相邻的 K 的路径出现的可能性。因此，类型(2)的路径就未被计数。

将在下面的分析中证明：$F(x; 5.75)$在$[0,1]$中没有稳定的周期轨道；这些(不稳定的)周期轨道在区间$[0,1]$中是稠密的。这些周期轨道仅包含可数的点。从其他点发散出的轨迹趋近于一个具有下面特征的无限集合A：

(1) 在F下A是不变量，即$F(A)=A$，

(2) 存在着$p\in A$，使$\{F^n(p), n=1,\cdots,\infty\}$ 在A中是稠密的，

(3) 存在着一个A的邻域N，它由轨迹渐近于A，即对于所有$q\in N$，$\lim\limits_{n\to\infty}F^n(q)\in A$的点所构成。

具有特征(1)—(3)的一个集合A被称为一个"奇怪吸引子"，并且被公认存在于单位区间[如$f(x)=4x(1-x)$]上的某些类似的映象之中。在这种情况和$F(x; 5.75)$中，整个区间$[0,1]$是一个奇怪吸引子。在这个奇怪吸引子上或附近发散的轨迹随机地绕$[0,1]$游荡。或许最理想的是：这样一种轨迹的长期行为具有良好的统计特征，如具有一个意义深远的长期时间平均数。这样，从$x_0\in[0,1]$出发，我们希望对于几乎每一个x_0，遍历均值(ergodic mean)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}F^i(x_0; \alpha), \quad F^0(x_0)=x_0, \tag{17}$$

存在。进而，我们将有可能计算经过多长时间——在一个较长时间跨度内平均——轨迹在一个即定的集合B内取值。将关于B的特征函数记作χ_B，这种在B中的平均逗留时间(mean sojourn time in B)被计算为：

---

① 例如，为了证明分定理2，即条件(1)的第一个等式，我们证明存在着一个不可数集$S\subset J$，使对于任何不同的p、$q\in S$，及无限多的n，有$F^n(p)\in L$且$F^n(q)\in K$。因此，对无多数n，它们实质上一定保持着一个有限的距离。

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\chi_B(F^i(x_0;\alpha))\right]=\eta[B;x_0] \qquad (18)$$

我们可以用遍历理论来研究上述极限存在及能被合理计算出的那些条件。

源于伯克霍夫(1931)的个体遍历定理为(17)式和(18)式的存在和计算提供了一个便利条件。该定理暗示：如果在[0, 1]上存在一个测度 η 使

对于所有可测的集合 B, $\eta(F^{-1}(B))=\eta(B)$ (19)

则对于几乎所有 x_0, (17)式存在。进而，如果对于几乎每一个 x_0, (18)式是与 x_0无关的，则(17)式可通过下式来计算：
对于几乎所有x_0,

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}F^i(x_0;\alpha)\right]=\int_0^1 d\eta \qquad (20)$$

等式(19)被归纳为"η 是在 F下的不变量"或"F保持着η"；等式(20)被归纳为"时间均值等于空间均值"或"F是遍历的"。

同样，如果 g 是[0, 1]上的任何一个实值的 η 可积函数，则可将它看作是一个依赖于状态 x_t 的变量，
对于几乎所有 x_0,

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}g(F^i(x_0;\alpha))\right]=\int_0^1 g\,d\eta \qquad (21)$$

这样，如果 F是遍历的，则在测度 η 条件下，(19)式可通过在[0, 1]上对χ_B 积分来计算出。

由于 F的域(即[0, 1])是一个紧豪斯道夫空间(compact Hausdoff space)，故克雷洛夫—博戈柳博夫定理 [Sinai

(1976)]保证不变测度 η 的存在。但是，由该定理保证的测度 η 可能在一个非常小的集合，也许甚至是一点上等于 0。现在我们可以宣布：在 [0, 1] 上的勒贝格测度的条件下，对于 F，不变测度 η 是绝对连续的。

运用斯坦和乌勒姆(1963)所提出的方法，我们力图证明：在单位区间上的 $F(x;5.75)$ 共轭于由

$$
\begin{aligned}
G(x) &= 2x & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\
&= 2(1-x), & \frac{1}{2} < x \leqslant 1
\end{aligned}
\tag{22}
$$

给定的单位区间上的"三角"映象 G，它们被绘于图 4.10 中。

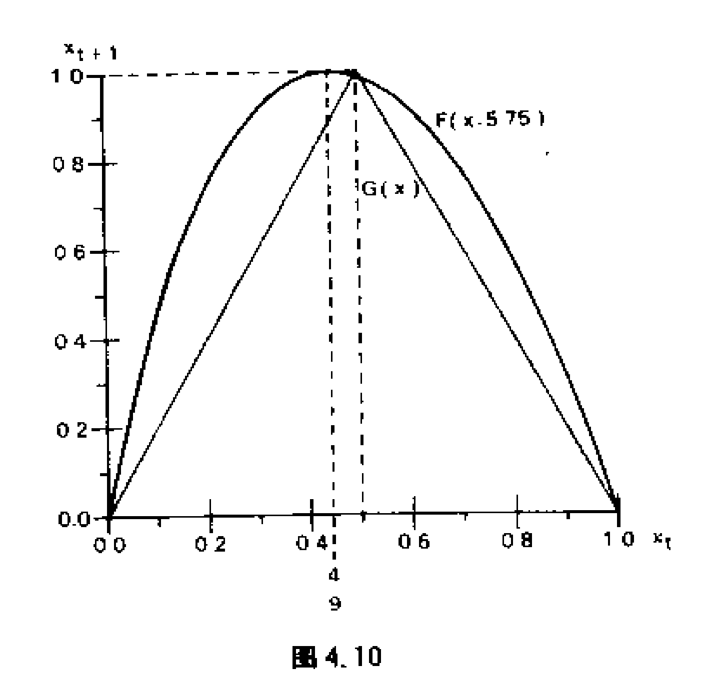


图 4.10

F 和 G 共轭意味着在单位区间上存在着一个可测的变换(即具有可测逆的双射、可测变换) h，使

$$F = h^{-1}Gh \tag{23}$$

如果 F 共轭于 G，则从(22)式可得 $F^k(x)=h^{-1}G^k h(x)$ 或 $h(F^k(x))=G^k(h(x))$。尤其是，如果对于某一 x，$h(x)$ 是 G 的一个 k-周期点，则 $G^k(h(x))=h(x)=h(F^k(x))$，且 h 的可逆性意味着 $x=F^k(x)$，即 x 是 F 的一个 k-周期点。同理，如果 x 是 F 的任何一个 k-周期点，则 $h(x)$ 是 G 的一个 k-周期点。这样，F 和 G 的周期轨道是一一对应的。简单的间接证明确立了这一事实，即任何共轭于 G 的 F 不能具有任何稳定的周期点。为了证实这一点，从反证法的角度出发，我们假定存在着 F 的一个稳定的 k-周期点 x。据此，我们假定 $|F^{k'}(x)|<1$。对于所有 x，共轭意味着 $h(F^k(x))=G^k(h(x))$。对该式微分后得：

$$h'(F^k(x))F^{k'}(x)=G^{k'}(h(x))h'(x) \qquad (24)$$

但由于其双射性(bijectivity)，$x=F^k(x)$ 且 $h'\neq 0$。因此，(24)式意味着：

$$F^{k'}(x)=G^{k'}(h(x)) \qquad (25)$$

像在(11)式和(12)式中那样应用链式法则，得：

$$G^{k'}\cdot(h(x))=\prod_{i=0}^{k-1}G'(G^i(h(x))) \qquad (26)$$

(22)式的检验结果表明：如果 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$（如果 $\frac{1}{2}<x\leqslant 1$），则 $G'=2(=-2)$。因而，从(26)式可得出 $|G^{k'}(h(x))|>1$，这就意味着 $h(x)$ 是 G 的一个不稳定的周期点。对照(25)式，$|F^k(x)|>1$，与我们所假设的 x 是稳定的相矛盾。因此，G 或 F 中不存在任何稳定的周期点。进而，古根海默等(1977)指出：对于 G，这些不稳定的周期点在[0, 1]上是稠密的；因此，由通过 h 的一一对应关系得出，对于 F，它们在[0, 1]上也是稠密的。

此外，如果 F 能被证明是共轭于 G 的，则很容易找到 F 的一个不变测度 η。通过对 G 的检验，显然 G 在[0, 1]上保持勒贝格测度 μ。如果 $F=h^{-1}Gh$，则很容易证明：由 $\eta(B)=\mu(h(B))$ 所定义的诱导测度 η 是 F 的一个不变测度。这样，区间 $[0, x]$ 中的 F 的平均逗留时间(18)式能被计算成

$$\eta([0, x])=\mu(h([0, x]))=|h(x)-h(0)| \tag{27}$$

进而，如果 h 是可微的且单调递增，则(21)式的计算可简化为：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}g(F^i(x_0; \alpha))=\int_0^1 g d\eta=\int_0^1 g(x)h'(x)dx \tag{28}$$

我们已建构起一种快速计算方法，它补充了乌勒姆寻找

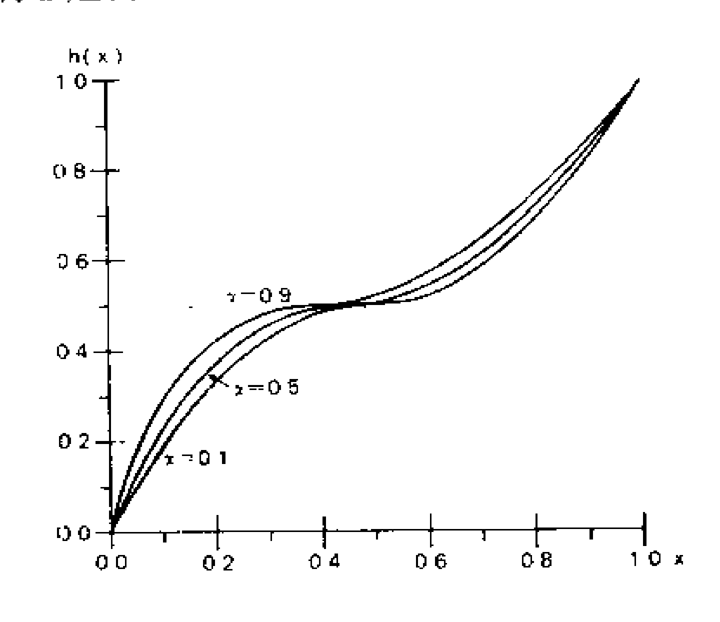


图 4.11　F 映射区间[0, x]时该区间内的平均逗留时间

h 的数值计算方法。图 4.11 显示了在单位区间上的 $F(x; 5.75, \alpha=\frac{1}{2})$ 及更为普适的映象 $F(x; \alpha^*, a)$ 的结果。对于

这些映象，几乎所有轨迹都是混沌的，图 4.12 显示出其中一条典型的轨迹。这些轨迹上的函数的时间平均(time averages)可通过对(28)式数值积分计算出。

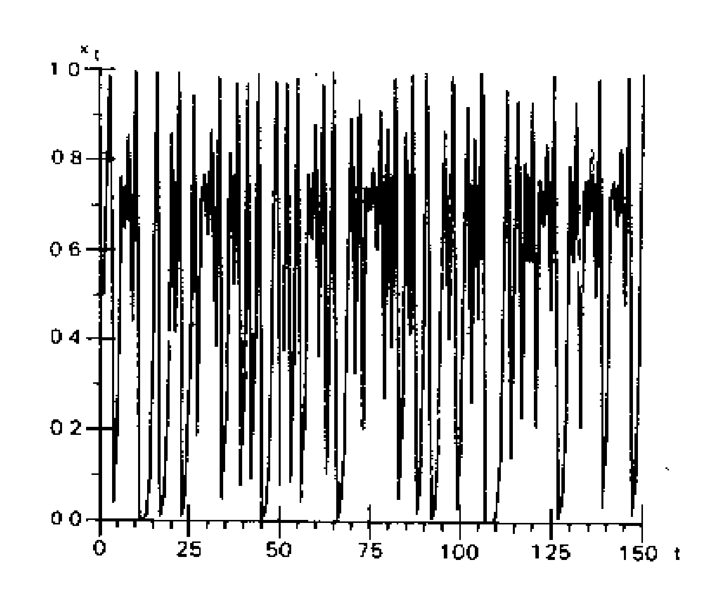


图 4.12 $x_{t+1}=6.75x(1-\sqrt{x_t})$ 的轨迹，$x_0=\frac{1}{2}$

4.6 结束语

注意到下面这一点是很重要的：即本文中的定性动态结果仅依赖于函数族 $F(x_t;\alpha,a)$ 的某些几何特征而非其代数形式。当调整非线性特征的结构参数变动时，连续不断的杈式分岔、然后是切分岔、最终是混沌的这一过程，是对所有“单峰”微分方程的概括——它们的图像呈现出图 4.2 所示的一般特征。例如，函数族 $F(x_t;\alpha)=\alpha x_t(1-x_t)$ 和 $F(x_t;\alpha)=x_t e^{\alpha(1-x_t)}$ 均展示出本文所描述的所有现象。

在一维和二维的微分方程系统中不存在奇怪吸引子以及

使用对在奇怪吸引子上或附近的轨迹涨落动态进行分析的统计方法的必要性。但我们已看到，这些现象在我们的一维差分方程中的确出现了。贝丁顿、弗里、劳顿(1975)，梅(1976)等人已指出，需要“较少”非线性特征的貌似奇怪吸引子的现象存在于二维或二维以上差分方程系统中的可能性要大得多。

在最近由贝纳比和戴(1979，1980)所完成的两篇论文中，他们建构了货币现象的两代重叠模型和具有内生偏好的消费者选择的准动态模型。这些模型展示出了混沌动态。一旦研究者们熟练地掌握了这种非线性分析的工具，人们一定会发现其他的应用领域。

傅　琳

译自1980年《经济动态和管理杂志》

为了使读者能形象地了解我们正在论述的问题，在图5.1中，我们对增长模型中的国民生产总值(GNP)进行了值得注意的模拟，该增长模型的描述见下文的5.3节。先是一个较迅速的增长时期；随后是一个循环周期；接着，在一个相当长的时期内(大约20个周期)出现了一个明显的“稳态”增长；然而，随后又出现游荡周期；最后，另一个与稳态十分接近的短暂时期再次出现，并趋向时间序列的终点。

笔者建立了导致这类结果的储蓄与生产率条件。这种分析利用了“混沌”的数学理论，此处所使用的混沌理论形式源于爱德华·洛伦兹的著作。李天岩和詹姆斯·约克在他们的一篇创新性论文中为我们提供了规范的混沌定义和混沌轨迹的充分条件。有关这些论述的概要见J·约克和伊夫林·约克的论文。将这种混沌理论引入经济学的有：杰斯·贝纳比和笔者(1981)——在那篇论文中我们指出，当偏好在某种程度上依赖于经验时，理性选择的结果可能是反常的；米夏埃尔·施蒂策——提供了一个有关特吕格弗·霍韦尔莫的增长模型的详尽分析；贝纳比与笔者(1980)——运用了叠代模

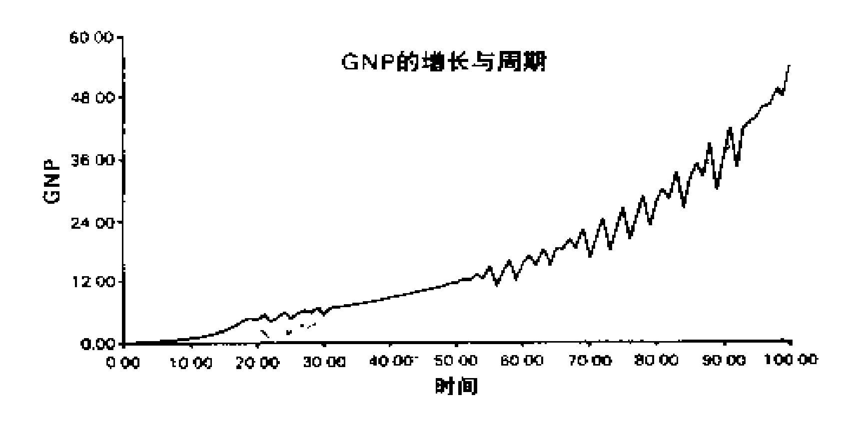


图5.1 不规则增长周期[方程(19)的一个模拟]

型(overlapping generations model)；以及笔者——即下面即将展开的关于古典增长模型的研究。

5.1 混沌周期

5.1.1 离散时间序列中的新古典模型

当标准的新古典增长模型在引入一个生产滞后而作出修改后，该模型可表示成一个资本—劳动比率 $k_t \equiv K_t/L_t$ 的差分方程：

$$k_{t+1}=s(k_t)\cdot f(k_t)/(1+\lambda) \tag{1}$$

其中 $s(\cdot)$ 是储蓄率，$f(\cdot)$ 是人均生产函数，λ 是人口自然增长率。自然，总产出由总生产函数 $Y_t=F(K_t, L_t)\equiv f(k_t)L_t$ 给出，其中总资本存量是 k_tL_t，且劳动供给 $L_t=(1+\lambda)^tL_0$。储蓄率可依赖于收入、财富及利率，但运用 $y=f(k)$ 和实际利率 $r=f'(k)$，它简化为只依赖于 k。

5.1.2 定性的动态

资本积累和人口增长的均衡增长路径与(1)式的静态有关，即资本—劳动比率 k 满足 $k=s(k)\cdot f(k)/(1+\lambda)$。这些均衡增长路径是否稳定依赖于(1)式在这些静态邻域中的稳定性。这样，在依赖于储蓄行为和资本生产率的条件下，增长能收敛于一个稳态，或围绕着一个稳态以涨落的方式振荡(这种涨落可收敛于一个比较有序的周期)，其结果可在——如图5.2所示——以(k_{t+1}, k_t)为坐标的常规相图中加以说明。

涨落并不收敛于任何一个有序周期的可能性是由洛伦兹

$$x_{t+1} = \theta\,(x_t\,;\,\pi) \equiv \theta\,(x_t) \tag{3}$$

(3)式的行为依 π 的参数而定。如果对于这些参数的某些值，在 J 中存在着一个点 x^c，使

$$\theta^3(x^c) \leqslant x^c < \theta\,(x^c) < \theta^2(x^c) \tag{4}$$

其中 $\theta'(x) \equiv \theta(x)$，$\theta^2(x) \equiv \theta(\theta(x))$，$\theta^{n+1}(x) \equiv \theta(\theta^n(x))$，则李天岩和约克指出：

A：在 J 中存在着每一个有序的周期。（即对于每一个 n，$n=1,2,3,\cdots$，J 中存在着满足 $x=\theta^n(x)$ 的点。）

B：J 中存在着一个不可数集合 S 使初始条件在 S 中的

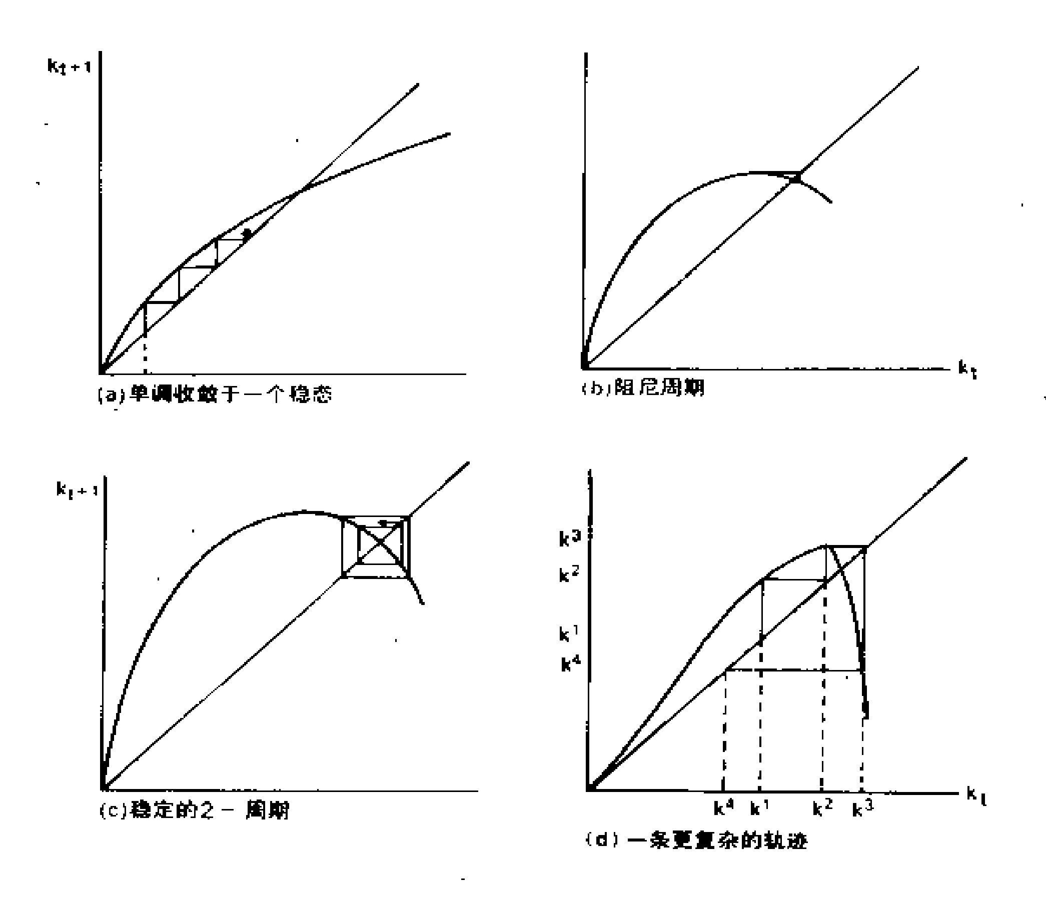


图 5.2 资本—劳动比率的动态：各种可能性[状况(d)说明了混沌不等式]

所有轨迹均保留在 S 内，并且

B_1: S 中每一条轨迹任意地游荡和接近每一条其他的轨迹，

B_2: S 中两条不同的轨迹无论彼此多么接近，但它们最后一定会相互游离，

B_2: S 中每条轨迹会游离 J 中的任何一个有序的周期，不管在一段时域内它会多接近于某一有序的周期。

由(4)式给出的这些混沌的充分条件在图 5.2(d) 中作出了说明。

按照史蒂夫·斯梅尔的一般方法，通过考虑映射 θ 的叠代 θ^n——实际上是研究(3)式的通解(符号解)的特征，李—约克定理可以得到证明。

$$x(t)=\theta^t(x),\quad x=x(0),\quad \theta^0(x)=x \tag{5}$$

这些叠代是 J 到 J 的自身映射，当充分条件(4)被满足时，这些叠代就以某种方式折叠区间，使其包含越来越多的"褶皱"。有人认为，这个过程有些像洗牌一样，所以，贯穿于非线性动态方程的这个"时间通道"(passage of time)多少起到像一个随机数字发生器(number generator)的作用。

在剩下的篇幅中，笔者将考虑新古典模型(1)的例子，并向读者证明存在着能够满足不等式(4)的储蓄和生产函数的参数值。笔者的方法是考虑这样一种情况，即存在可达到的最大资本—劳动比率 $k^m=s(k^*)\cdot f(k^*)/(1+\lambda)$，其中，在假定 $k^m>k^*$ 的条件下，k^* 使 $s(k)\cdot f(k)$ 最大化。然后，笔者将 $s(k)\cdot f(k)/(1+\lambda)=k^*$ 的最小根称为 k^c。于是，充分条件(4)变成：

$$s(k^m)f(k^m)/(1+\lambda)\leqslant k^c<k^*<k^m \tag{4'}$$

的递增所引起的。当 γ 接近于零时，该项不断接近于 1，直至 k 接近于 m 时，该项则迅速下降。这样，生产函数

$$f(k)=Bk^{\beta}(m-k)^{\gamma} \tag{8}$$

在其大部分值域中表现得像传统的幂函数(6)。

在保留固定储蓄率 σ 的条件下，可得到差分方程：

$$k_{t+1}=\sigma Bk_t^{\beta}(m-k_t)^{\gamma}/(1+\lambda) \tag{9}$$

对于 β 和 γ 的正值，该函数在一个唯一的最大化资本—劳动比率 $k^m=s(k^*)\cdot f(k^*)/(1+\lambda)$ 条件下，具有一个单一的上凸形状，其中，

$$k^*=(\beta/\beta+\gamma)m \tag{10}$$

使

$$k^m=\frac{B\sigma}{(1+\lambda)}\beta^{\beta}\gamma^{\gamma}(\frac{m}{\beta+\gamma})^{\beta+\gamma} \tag{11}$$

注意，这个最新得到的值依赖于 B，但导出它的资本—劳动比率 k^* 则不是。这意味着，当不改变 k^* 的条件下 B 连续地向上递增时，(9)式的图形可被扩展。同时也应注意，当 k 接近于零时，生产函数的斜率会无限增大。结果是，在充分小的初始条件下，对于任何 B 的正值，增长必须是正的。

对于足够小的 B 值，其状况正如图 5.3(a) 所示：从上面或从下面单调地接近一个正值的静态。当产量参数 B 增加时，稳态的资本存量增加直至最终出现 $k^m=k^*=k^s$ 为止。这儿是分岔点，在该点上，对于更高的 B 值，资本—劳动比率的振荡一定会出现。为了防止 k 中出现负值，我们必须有 $k^m\leq m$。因此，对于我们满足

$$\frac{\beta}{\beta+\gamma}m<\frac{\sigma B}{1+\lambda}\beta^{\beta}\gamma^{\beta}(\frac{m}{\beta+\gamma})^{\beta+\gamma}\leq m \tag{12}$$

的参数值，资本—劳动比率最终会呈现出有界的振荡，或许这

发生在一个增长时期之后。因此，关系式(12)是模型(9)中增长周期的充分条件。

为了考察这些周期是否可能是混沌的，我们需要看看满足充分条件(4′)式的参数值是否存在。对于考虑中的模型而言，这种条件总是成立的！选择 B 值为 B''，使(12)式的右侧是一个等式，即：

$$k^m=\frac{\sigma B''}{1+\lambda}\beta^{\beta}\gamma^{\gamma}\left(\frac{m}{\beta+\gamma}\right)^{\beta+\gamma}=m \tag{13}$$

从(10)式中可以很明显地得到 $k^*<k^m$。这种情况显示在图5.3(b)中。显然，下面的方程存在着两个正根

$$\frac{\sigma B}{1+\lambda}k^{\beta}(m-k)^{\gamma}=k^* \tag{14}$$

令 k^c 为这两个正根中较小的一个，则现在我们得到：

$$0<k^c<k^*<k^m \tag{15}$$

其中，k^c 导出 k^*，* 导出 k^m，k^m 导出 0。另外，我们的函数映射区间 $[0, m]$。所以，前面所描述的李一约克定理的全部条件均得到满足。既然我们的相图能被连续地扩展，则存在着一个较小的 B 值，如 B'，使对于区间 $[B', B'']$ 中的任何 B，存在一点 k^c(取决于 B)满足(14)式且满足：

$$0\leqslant\frac{\sigma B}{1+\lambda}k^{m\beta}(m-k^m)^{\gamma}\leqslant k^c<k^*<k^m \tag{16}$$

使对于所有这样的 B，无规则振荡便发生了。

对于 $\beta=\gamma=m=1$ 的特殊情况，差分方程(9)简化成(2)式，其中 $A=\sigma B/(1+\lambda)$。因此，对于满足

$$3.57\leqslant\frac{\sigma B}{(1+\lambda)}\leqslant 4$$

的参数组合，存在不规则投资周期。（见 J. Yorke and E. Yorke，第 16—20 页）

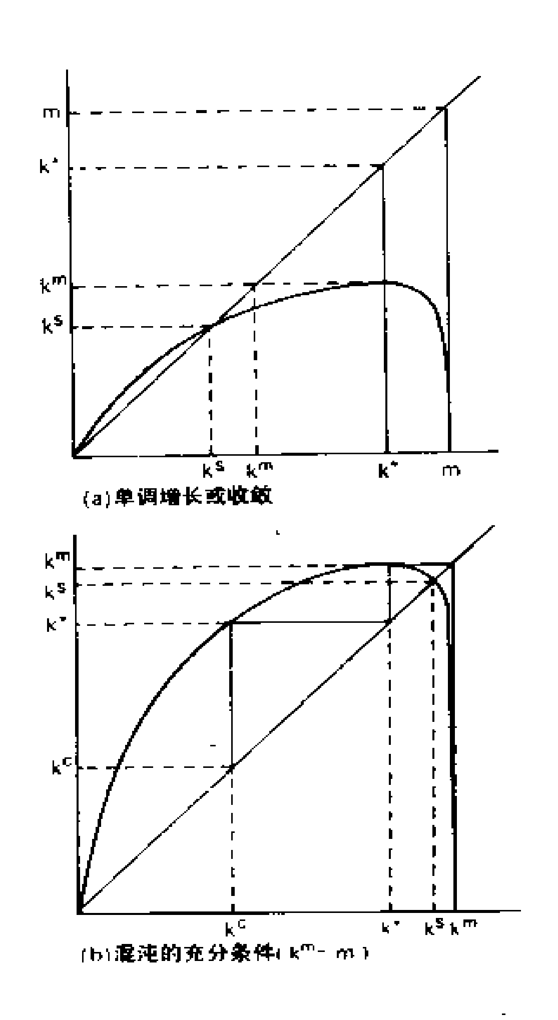


图 5.3　产生混沌的函数的扩展

例 3：一个变动的储蓄率

现在，我们回到例 1 中的标准生产函数(6)上，但要考虑一个变动的储蓄率 $s(k)$，它依赖于收入、财富及实际利率 r。我们不对一个效用显函数进行求导，而是假设人均储蓄是与财富(k)成比例的，并随利率上升而增加。我们进一步假设，

当利率充分小时，储蓄不足以维持资本存量，而财富则被消费掉。具有这个特点的函数是：

$$s(k)y=a(1-\frac{b}{r})k \tag{17}$$

运用(6)式和 $r=\beta y/k$ 的事实，(17)式给出了差分方程

$$k_{t+1}=[a/(1+\lambda)]k_t[1-(b/\beta B)k_t^{1-\beta}] \tag{18}$$

该方程位于区间$[0,(\beta B/b)^{1/(1-\beta)}]$中，并具有我们已熟知的上凸且单峰的形状，图 5.3 中对它进行了说明。因此，我们能够用类似的方法，即通过连续地改变储蓄参数"a"来扩展(18)式的图，得到一系列分岔点，在这些点上，定性行为随着越来越有序的周期的出现而变化。同样，我们能找到一个区间$[a', a'']$，对于该区间内的任何储蓄参数，都有能满足充分条件(4′)的混沌点存在。

例 4：一个关于行为的假设：受约束的增长

迄今为止，我已向读者指出可以导致无规则的积累周期的技术参数或储蓄行为参数的存在。对满足充分条件(4)式的实际参数值的计算通常是利用数值计算程序来完成的。[①] 然而，如果资本对劳动的替代被一个最大化的潜在增长率如 ρ 所约束，则动态分析是相当简便的。如果(ⅰ)出于纯粹的心理动机，经济实体对限制生产技术的变化率具有绝对的偏好；(ⅱ)由于调整成本(卢卡斯意义上的)；或(ⅲ)作为避免生活方式改变中内在的不确定性的一种策略(笔者 1979 年的论文)，则这种约束就将成立。在这种情况下，经济的跃迁方程

---

① 从理论上讲，这项工作是能够完成的。例如，利用牛顿法解出非线性方程的根。但笔者迄今为止的初步经验仍认为这是相当困难的，特别是下面所运用的函数形式更是如此。

将以下式替代(1)式:

$$k_{t+1}=\min \{(1+\rho)k_t, s(k_t)f(k_t)\} /(1+\lambda) \qquad (19)$$

其中 $s(k_t)$是储蓄率,它在缺乏预防性约束条件时成立。当给出(19)式最大值的资本—劳动比率至少与使(1)式达到最大值的 k 值一样大时,最简单的——也是笔者将唯一予以考虑的——情况就发生了。在这种情况下,k^{**}是方程

$$(1+\rho)k=s(k)\cdot f(k) \qquad (20)$$

的最大解(假设一个解存在)。

当 $k^m=[(1+\rho)/(1+\lambda)]k^{**}$,且当 $k^{**}=[(1+\rho)/(1+\lambda)]k^c$ 时,则只要 $\rho>\lambda$,不等式 $k^c<k^{**}<k^m$成立。在假定了这个约束条件后,判定混沌的充分条件(4′)式简化为两个不等式:

$$0\leqslant s(k^m)\cdot f(k^m)/(1+\lambda)$$
$$\leqslant[(1+\lambda)/(1+\rho)]^2k^m=k^c \qquad (21)$$

其中,$k^m=[(1+\rho)/(1+\lambda)]k^{**}$

如果我们假定储蓄函数(17)和一般生产函数(6)成立,则我们得到不等式(21)的表达式:

$$0\leqslant a[B(k^m)^{\beta-1}-b/\beta]/(1+\lambda) \qquad (22)$$

$$\leqslant(\frac{1+\lambda}{1+\rho})^2$$

其中

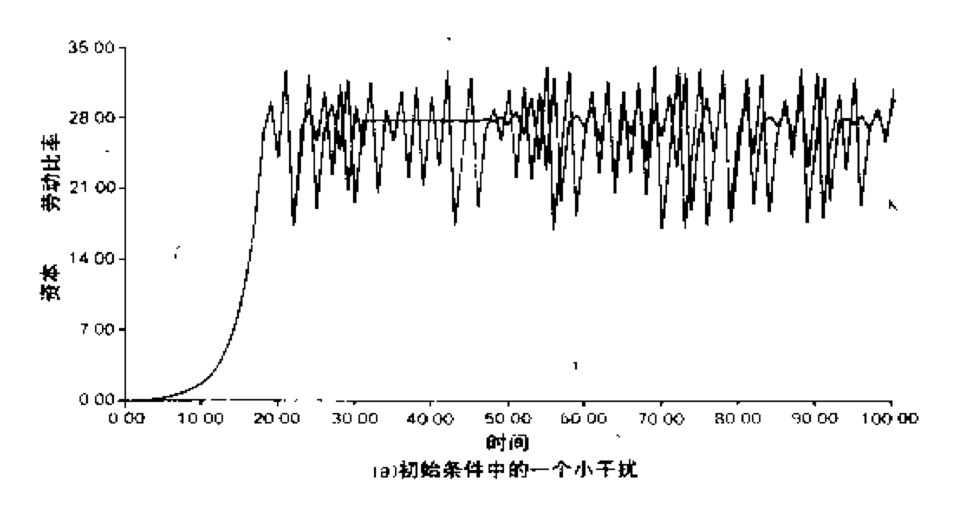
$$k^m=\frac{1+\rho}{1+\lambda}\ \frac{(1+\rho)(1+\lambda)}{aB}+\frac{b}{\beta B}1/(\beta-1) \qquad (23)$$

图 5.1 显示的模拟就是为此模型作出的。[①]

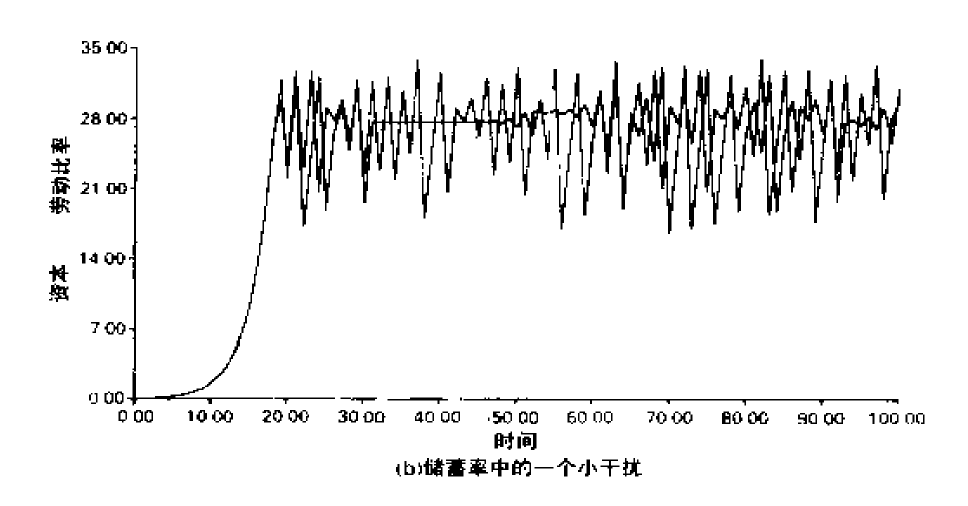
① 该模拟中 $\rho=0.4143$, $a=5.25$, $b/B=2$, $\beta=0.5$, $k(0)=0.072068$。

5.3 不稳定性与可预测性

至此，我们已经熟悉了新古典的一部门资本积累模型中生产或储蓄函数的各种非线性特征，它们能在资本—劳动比率和 *GNP* 中诱发无规则的非周期轨迹。笔者准备通过说



(a)初始条件中的一个小干扰



(b)储蓄率中的一个小干扰

图 5.4　混沌轨迹的不稳定性

（注意：随着时间的演进，混沌轨迹彼此游离，走近，再游离。）

含非线性特征的广泛的经济学领域。虽然这些方法的贴切程度和全部应用范围只有在作出更为详尽的研究后方能显露出来，但它所包含的关于我们如何思考经济理论和经济政策的内涵，可以说是相当深远的。

傅　琳

译自 1982 年 6 月《美国经济评论》



《不规则增长周期》补遗

邹　刚*

6.1　引言

理查德·戴十年前在《美国经济评论》上发表的"不规则增长周期"一文，已经成为混沌经济学引用最广泛的经典文献。戴将混沌经济学首次引入索洛的增长模型，在通常认为只能产生均衡增长轨迹的框架内，巧妙地构造和模拟了系统的不规则周期和非均衡增长的状态。戴的这项研究被广泛地认为不但是在非均衡增长模型方面，而且是在混沌经济学方面的开拓性工作。

众所周知，索洛1956年提出他的增长模型后，经济学界在不到十年内，出现了几百篇改进和发展索洛增长模型的论文。相比之下，戴的非均衡增长模型虽然被引用了成百上千

* 邹刚：美国南加州大学经济学博士，现在南加州大学经济系工作。本文的写作是基于笔者的博士论文《发展的增长》(Growth with Development)的第五章，由笔者译成中文。在本文的写作中，笔者得到了博士论文导师理查德·戴的帮助，在此表示感谢。同时也感谢"海恩斯博士论文奖"和"麦克纳马拉博士后奖学金"的资助。文中的观点和错误由笔者负责。——译者

次，但在过去十年中，没有出现一篇应用或改进戴非均衡增长模型的论文。笔者认为，产生这种现象的原因是戴的论文在技术上而不是思路上，存在着一些致命的问题。这些问题阻碍着后人推进或应用他的模型。

本文试图讨论戴论文中存在的问题。针对这些问题，笔者提出一类新型生产函数，并在标准的索洛增长模型框架内，用这类新型生产函数构造和模拟不规则周期与非均衡增长状态。笔者这项工作的结论与戴论文的思路完全一致。但是，本文提出的模型消除了戴模型中存在的技术性问题，从而为发展混沌经济学的增长模型提供了一条可行的途径。笔者最后讨论了用这类新型生产函数构造的、带有结构变化的经济增长与发展模型。

6.2 “不规则增长周期”一文存在的问题

索洛增长模型在数学上是采用一组微分方程表述的。索洛系统的核心是描述资本积累关系的“基本微分方程”。因为基本微分方程只能在齐次线性生产函数的条件下导出，所以索洛在提出其增长模型的文献中，一开篇就强调他的模型是在齐次线性生产函数的假定下进行讨论的。

戴在他开拓性的文献中，一开篇就强调他的工作是符合标准索洛增长模型框架的。参照索洛的基本微分方程，戴首先导出等价的描述资本积累关系的基本差分方程，继而将索洛系统差分化，推导出其他参量的增长轨迹。鉴于基本微分方程与基本差分方程是等价的，索洛系统中对齐次线性生产函数的假定在差分系统中也必须遵守。但是，戴在构造和模

拟索洛系统下的非均衡增长模型时，没有符合这一严格的假设。因此，戴的基本差分方程、以及由此导出的其他参量的关系式，对标准索洛系统来说，实际上是不成立的。

进一步考察，戴的资本积累的基本差分方程舍弃了索洛的对等方程中的资本折旧项。舍去资本折旧项的资本积累关系式表明，资本在某一时点的总量，完全取决于其前一时点的投资，亦即原有资本在一个时点内全部损耗。这一隐含的假定，使戴的动态系统的计时单位不可能由年份来刻画。戴曾指出，这类模型是以"一代"为计时单位。在每一计时单位中，所有固定资本更新一次，从而资本积累关系式中资本折旧项可以视为零而舍弃。如果我们以25年为一代，取40个时点来做模型叠代，戴的系统的模拟时间跨度就已达一千年。即使戴的系统能描述超长时间的经济增长周期，但系统对人们普遍关心的25年以内的周期性现象无能为力。这类系统更不可能刻画短周期与长周期的关系。

这两个问题虽然是属于技术细节上的，但问题的存在已使戴的模型偏离了索洛系统，以致后人无法在这样一个矛盾的系统下从事应用和改进戴模型的工作。

6.3 新型生产函数及其增长模型

问题的产生暗示着解决问题的途径。解决问题的方法在于设计出一种新型生产函数，它既能符合齐次线性的假定，又可以用来模拟非规则增长周期。现有的任何一种生产函数显然不能同时符合这两项要求。因此，笔者在博士论文中提出一种新型生产函数，如下式表示：

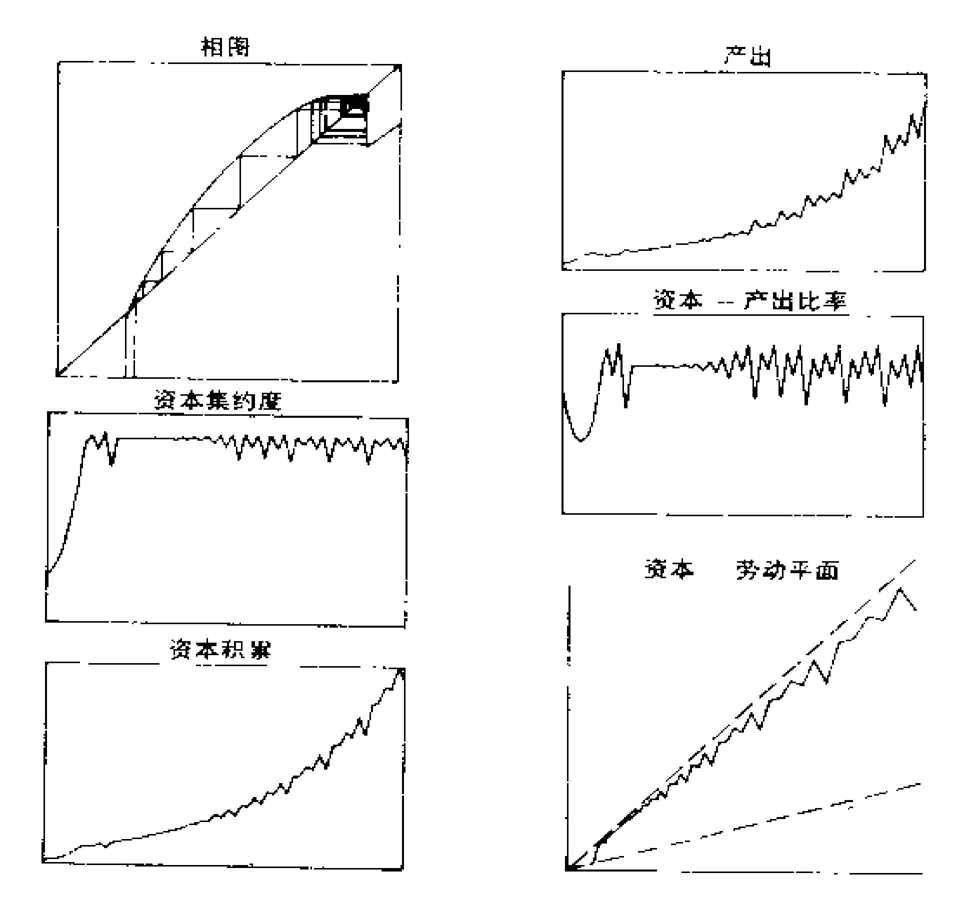


图 6.1 混沌状态的增长模拟

6.5 经济增长与结构变化

如前所述，索洛增长模型中无论人均资本 k 从何值出发，最终将稳定在一个均衡状态的数值上。代入新型生产函数的索洛增长模型中的人均资本 k 是否能稳定在均衡状态，取决于系统参量和系统初始条件。在一定条件下，k 有可能产生不规则的周期扰动。受索洛系统的限制，改进的模型也不能描述经济发展过程中人均资本有可能在某一段迅速增长

的现实。

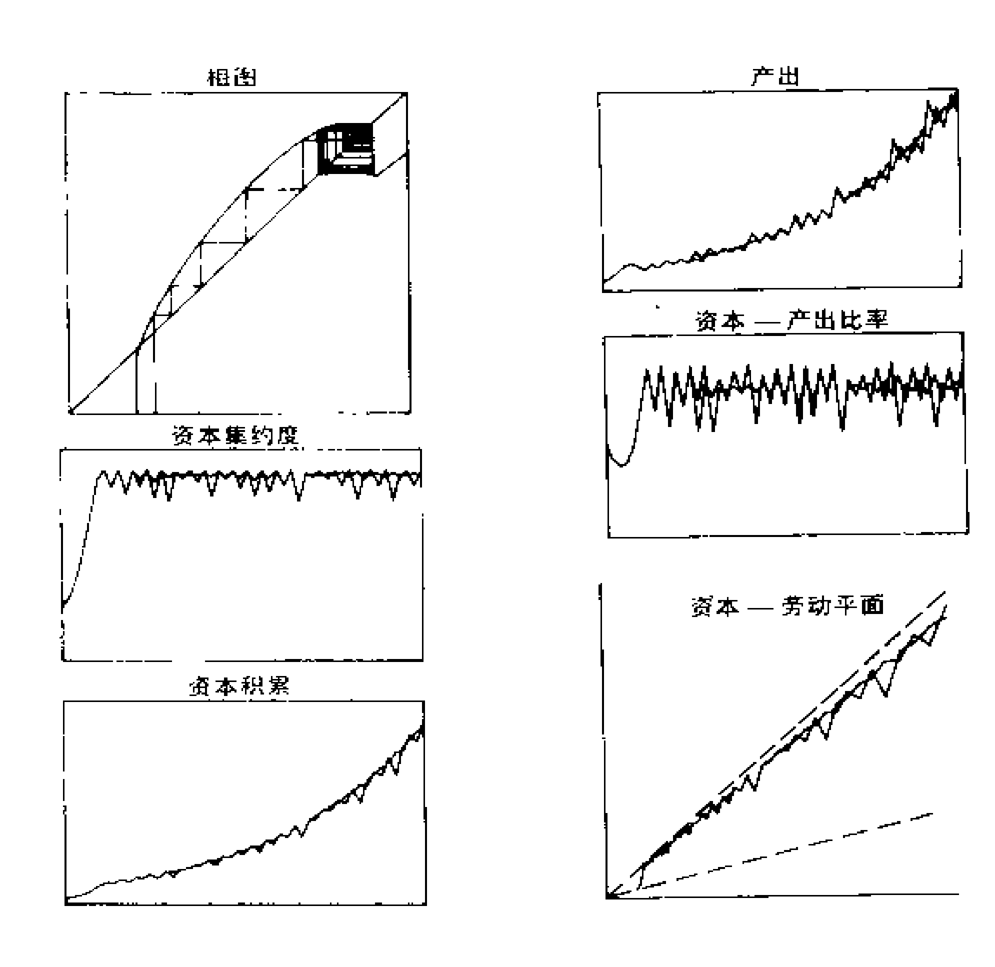


图 6.2　比较动态模拟

笔者借鉴戴关于超长时期人口增长的研究，拓广改进后的索洛模型以达到描述上述现象的目的。简而言之，拓广模型的思路是引入经济发展过程中结构变化的因素。假定在不同经济结构中增长系统可以用对应的系统参数组描述。具体说来，以 i 代表某一经济结构，其系统参数为 s^i，λ^i，σ^i，α^i，m^i 和 n^i。假定这些经济结构是相互叠加的，并符合 $m^i < n^{i-1}$

$< n^i$，则多种经济结构下资本积累的差分方程可表述如下：

$$
k_{t+1}=\begin{cases} 0, & 0\leqslant k_t\leqslant m^i \\ \dfrac{1}{1+\lambda^i}[s^i\varphi^i(k_t-m^i)^{\alpha^i}(n^i-k_t)^{1-\alpha^i} & \\ \quad +(1-\delta^i)k_t], & m^i<k_t<n^i \\ \dfrac{1-\delta^i}{1+\lambda^i}k_t, & n^i\geqslant 0 \end{cases} \quad (3)
$$

其中 $i=1,2,3,\cdots$。仿照多结构下的基本差分方程，可以推导出整个多结构的索洛系统。假定在多于一个经济结构叠加时，经济从一个结构过渡到另一个结构是以谋求最大人均产出为原则。我们可以求解多结构下的基本差分方程，进而求出多结构的其他系统参量的解，达到描述带有结构变化的经济增长与发展过程的目的。

图 6.3 给出带有结构变化模型的两次模拟的叠加结果。①如果假定每一次模拟轨迹代表某个国家的经济运行，则我们可以观察到，其中一国在第一和第二经济结构中落后于另一国的经济增长。但在第三经济结构中，落后国赶上先进国。在系统模拟时，这一结果是由于落后国在第三经济结构中提高储蓄率 s^3 而达到的。由此可见，拓广了的模拟显然能强化对经济结构与经济增长关系的理解。最后，由于恢复了索洛体系的资本积累关系式中的资本折旧项，所以无论是上节还是本节的模型，均可以年份为计时单位，描述短期经济波动现象。

---

① 图 6.3 的模拟方程原则上与(3)式一致。但由于引入各种技术进步因素而复杂化了。模拟方程组系统的参数和初始条件，参见笔者博士论文的第 221—222 页。

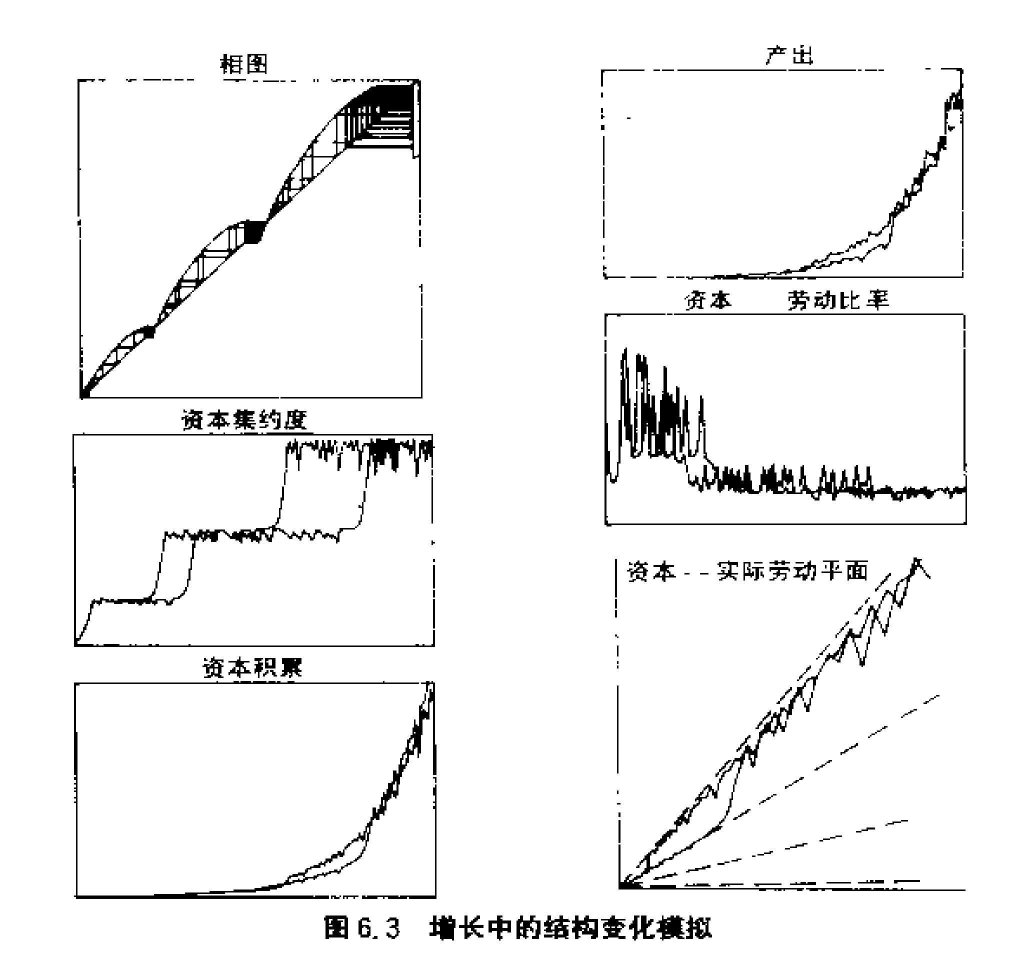


图 6.3　增长中的结构变化模拟

6.6　结论

本文采用一种新型生产函数，在符合标准索洛增长模型假定的条件下，构造和模拟了包括各种性态在内的经济增长过程。模拟结果完全符合戴 10 年前提出的思路。从某种意义上说，本文完成了戴 10 年前曾想完成的工作。本文提出的改进和拓广的增长模型，直接响应了索洛在 1987 年诺贝尔奖获奖演说中的呼吁——"学术界(当前)最需要的是共同探索(经济)为什么会在一定时期内偏离均衡增长的状态"。

于引入这一主题的目的，我们回顾一下大家熟悉的生产率和人口增长的古典模型。该理论为本文的研究提供了一个方便而且自然的出发点。其方便之处在于：它为研究混沌提供了最简单而又可能的背景；其自然之处在于：对该理论给出了定义形式的马尔萨斯(1817)强调过振荡一定是早期人口与收入动态的共同模式。

关于决定论动态系统中的“混沌”的正式理论是最近才产生的。虽然其他领域中的一些早期研究者早就认为混沌学有可能与经济学发生关联，但是，施蒂策(1980)和我们的工作(Benhabib and Day 1981, 1982)显然是在经济模型中研究这种现象的第一次尝试。出于这个原因，在对古典模型进行分析之前，我们扼要地评论一下混沌的基本特征和充分条件。在这些一般性介绍之后，我们给出包含特定产量与出生率函数的例子。本文的结尾将对有关的应用和解释加以评论。

虽然本文所运用的古典增长理论是大多数经济学家所熟悉的，但是读者还是应对几个意外之处有所准备：最基本的当然是数学“混沌”自身的性质；还有一个非线性模型演化出截然不同类型的行为的能力，即在基本结构未发生相应变化的条件下，从一种行为类型向另一种类型内生地演化能力。两个数值模拟说明了这种现象以及马尔萨斯的“不规则的……退步和进步的人口运动”。

7.2 混沌学

本文讨论的这类动态现象历史相当短，但变化令人吃惊，而且是在几个不同的科学和数学领域中提出的。例如，

可参见洛伦兹(1964，气象学)、乌勒姆(1963)、茹厄勒和塔肯斯(1971，物理学)、梅(1974，生物学)等人的文章。在本文的研究中，古典经济学关于生产率、人口增长及收入分配的假设被用于导出关于人类人口的一个单实值差分方程：

$$x_{t+1}=\theta\ (x_t) \tag{2.1}$$

由映射 $\theta: x\rightarrow\theta\ (x)$ 所产生的一条轨迹是一个序列 $\{x_t\}_0^\infty$，其元素满足(2.1)式。混沌轨迹由李天岩和约克(1975)给出了精确的定义。他们所做的规范定义列于本文的附录中。总括起来，混沌的特征有4个。首先，各种阶的周期都存在。其次，存在一个含有非周期的混沌轨迹的"不规则集合"。该集合中的轨迹具有下列特征：第一，每条混沌轨迹会游离其他任何混沌轨迹；第二，所有混沌轨迹又会任意地彼此游近；第三，混沌轨迹游离任何周期性轨道，即它们是非周期的，不收敛于任何一个有序的周期。显然，混沌轨迹是极不稳定的，并且与我们对数字的经济数据的经验结论——数据通常以一种极不规则的方式波动，并具有令人头痛的不可预测性——具有共同特征。

读者自然而然要询问，在什么条件下混沌行为可出现于体现具体经济结构的模型中。为了回答这一问题，本文运用了如下基本论据：

定理(李一约克)　令(2.1)式的函数 θ 为一个区间 J 的连续映射，$J\rightarrow J\subset R$。假定存在着一点 $x\in J$，使

$$\theta^3(x)\leqq x<\theta\ (x)<\theta^2(x) \tag{2.2}$$

则

(i)对于每一个 $k=1, 2, 3, \cdots$，J 中存在着一个 k-周期的轨迹，且

（ⅱ）θ 在一个不可数的非规则集合 $S \subset J$ 上是混沌的。

对该定理的解释和其证明的注释，以及大量关于相应分岔理论的有用材料，可在前人的一系列研究中找到。例如，参见梅(1976)，梅和奥斯特(1976)，古根海默、奥斯特和伊帕克奇(1977)，以及施蒂策(1980)等人的论文。此外，笔者还运用它提出了无规则的理性行为(erratic rational behavior)理论、叠代的纯交换经济的混沌动态理论，及资本积累模型中的不规则投资周期理论。参见贝纳比和戴(1980，1981)及戴(本文)的文章。

我们此处所关注的仅限于连续的差分方程，其产生的映射 θ 在某些参数条件下表现为"单峰"形式，并具有 $\theta(0)=0$，且对于充分小的正 x，$\theta(x)$ 随 $\theta'(x)>1$ 而增加。对于这种映象，我们能够将由预先设想(preimage)或最大化人口 x^* 产生的一个可达到的最大人口数 x^m 定义为：

$$x^m=\theta(x^*)=\max_{x\geq 0}\theta(x)>0 \tag{2.3}$$

在图 7.1(b)、(c)、(d)中，这种人口数存在，但在图 7.1(a)中不存在。由于 θ 的单峰性质，人口 x^* 可能具有两种预先设想的值，较小的一个我们记作 x^c。当然，$\theta(x^c)=x^*$。如果 $\theta(x^m)\geqq 0$，则任何初始条件 x 必须映射于区间$[0, x^m]$中，以使李—约克定理所要求的集合 J 存在。现在，判定混沌的充分条件(2.2)式能被重新表达成：

$$0<\theta(x^m)\leqq x^c<x^*<x^m \tag{2.4}$$

接下来的程序就清楚了。首先，确立参数(如果这种参数能找到的话)，使 x^m 如(2.3)式所定义的那样存在。然后，找出参数使(2.4)式的四个不等式能被满足。对于古典经济增

长模型的几种形式而言，这一工作现在已经完成了。

7.3 古典的农耕经济

古典增长理论的最简单形式基于三个组成部分：一个显示净出生率与收入关系的方程、一个描述“直接劳动产品”的生产函数，以及一个定义劳动力工资的分配函数。马尔萨斯认为，当生活必需品相当充足时，人口倾向于以一个最大的生物或自然增长率增加，比如 λ；当生活必需品匮乏时，他假设在确定的维持生存水平上的净人口出生率是最大和可实现的净出生率，记为 σ。相应地，按平均年份计算的人口增长率受下面的函数支配：

$$\Delta P/P=\min\ \{\lambda,(\omega-\sigma)/\sigma\} \tag{3.1}$$

其中，$\Delta P/P$是净出生率，ω 是工资率。令$\Delta P=P_{t+1}-P_t$，则我们发现，人口增长方程变为：

$$P_{t+1}=\min\{(1+\lambda)P_t,\ \omega_t P_t/\sigma\} \tag{3.2}$$

沿着马尔萨斯的思路，我们将时间单位用“代”(generation)表示，每一代为 25 年，所以(3.2)式描述了一个代序列的演化。[①]

考虑一个平均主义的农耕社会，在那里，由生产函数 $Y=f(P)$决定的总产出根据平均产量来分配(参见 Georgescu-Roegen 1960)，则：

$$\omega_t=f(P_t)/P_t \tag{3.3}$$

假定(3.3)式有 $f(0)=0$，且f是连续且“单峰”的。则(3.2)

① 笔者曾尽可能地使用马尔萨斯的文字解释。对古典模型做出规范探索的早期研究者包括萨缪尔森(1948)和鲍莫尔(1970)。将马尔萨斯的自然增长约束的明确引入简化了该理论充分条件的应用。

式变成:

$$P_{t+1}=\theta(P_t):=\min\{(1+\lambda)P_t,f(P_t)/\sigma\} \qquad (3.4)$$

虽然(3.4)式由两部分组成,且彼此交织在一起,但它仍是连续且单峰的。关于方程(3.4)的几个相图显示于图 7.1 中。

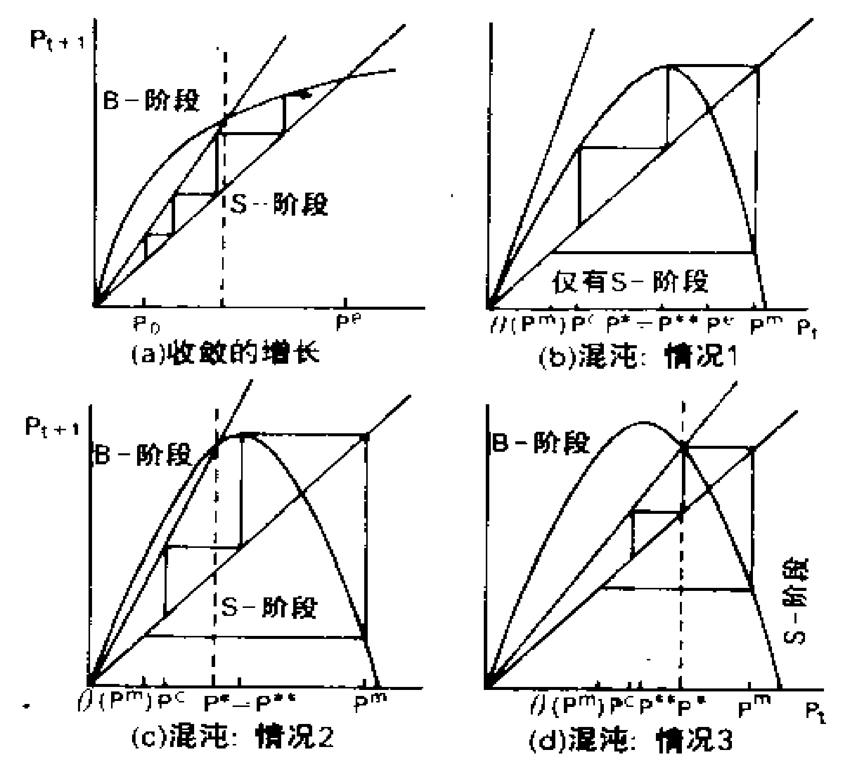


图 7.1　古典农耕经济:收敛的增长及三种类型的混沌

在假定自然增长率 λ 不是太大的条件下,我们发现:农耕社会的经济史由两种方式控制着,一种是增长率受自然增长率 λ 的约束;另一种是生活资料控制着人口。前者可被称为"生物(biological)阶段(记作 B-阶段)";后者为"维持生存(subsistence)阶段(记作 S-阶段)",在图 7.1(a)中,在导致固定人口数 P^e 的时间中,单调增长发生于生物阶段,其中 $f(P^e)=\sigma P^e$,即产出仅够维持生存水平上的人口数。在图

7.1(b)—(d)中，出现人口过剩，并且呈现食物富足阶段和饥荒阶段交替发生的周期。

给定 f 是单峰的，则 P^m 存在，且

$$P^m=\theta(P^*)=\min\{(1+\lambda)P^*,\ f(P^*)/\sigma\}$$
$$=\max_{P\geq 0}\min\{(1+\lambda)P, f(P)/\sigma\} \tag{3.5}$$

在定义 P^c 为预先设想的 P^*，即使 $\theta\ (P^c)=P^*$的条件下，我们发现，如果：

$$0<\theta\ (P^m)\leqq P^c<P^*<P^m \tag{3.6}$$

则混沌定理将得到满足。

(3.6)式的第二个不等式意味着：

$$f(P^m)/(P^m)\leqq(P^c)/(P^m)\sigma \tag{3.7}$$

即在最大人口数 P^m条件下，平均的劳动产量低于维持生存的水平(由分数 P^c/P^m 表示)。或者，生产低于维持生存水平上的人口 P^c 所需要的水平；即：

$$f(P^m)\leqq\sigma P^c \tag{3.8}$$

由于(3.2)式两个阶段的分段特征，几种类型的振荡都是可能的。为了识别这些类型的振荡，当不考虑生物学上的约束时，令 P^{**}为预先设想的最大人口数，即：

$$\theta(P^{**})=\max_{P>0}\frac{f(P)}{\sigma} \tag{3.9}$$

(当然，$P^*\geq P^{**}$。)依赖于自然增长率和生产函数 $f(\cdot)$ 的参数的三种不同的情况现在均可看到。它们是：

情况 1: P^c、P^*、P^m 均处于维持生存阶段。

情况 2: P^c 处于生物阶段，P^*和 P^m 处于维持生存阶段。

情况 3: P^c、P^*、P^m 由生物控制方式导出；同时 P^m 处于维持生存阶段。

在情况 1 中[显示于图 7.1(b)]，自然增长率如此之大，以至于李—约克条件改变为：

$$0 \leq f(P^m)/\sigma \leq P^c < P^{**} < P^m = f(P^{**})/\sigma \quad (3.10)$$

其中 $f(P^c) = \sigma P^{**}$。在情况 2 中（显示于图 7.1c 中），$P^* = P^{**}$，且 $P^c = P^{**}/(1+\lambda)$。因而判定混沌的充分条件变成：

$$0 \leq \frac{1+\lambda}{\sigma} f\left[\frac{f(P^{**})}{\sigma}\right] \leq P^{**} < \frac{f(P^{**})}{\sigma} \quad (3.11)$$

在情况 3 中（显示于图 7.1 d 中），自然增长率小于情况 1 和情况 2（假使其他条件相同），故使人口 P^c、P^* 及 $f(P^m)/\sigma$ 被限制在生物阶段中。因而，$P^* > P^{**}$，且 $P^m = (1+\lambda)P^* = f(P^*)/\sigma$。从这些事实和 $P^c = P^*/(1+\lambda)$ 中我们发现，在情况 3 中，在给定过剩存在的条件下，判定混沌的充分条件压缩成下面的不等式：

$$0 \leq f(P^m)/P^m \leq \sigma/(1+\lambda)^2 \quad (3.12)$$

即在最大人口数上的平均劳动产量必须是正的，但低于维持生存水平的分数 $1/(1+\lambda)^2$。

7.4 实例

当生产函数被具体指定时，一旦判定混沌的充分条件被满足，我们就能说明古典模型和混沌演化中内生行为的引人注目的那部分定性模式。出于这种目的，我们可运用下面的弹性函数：

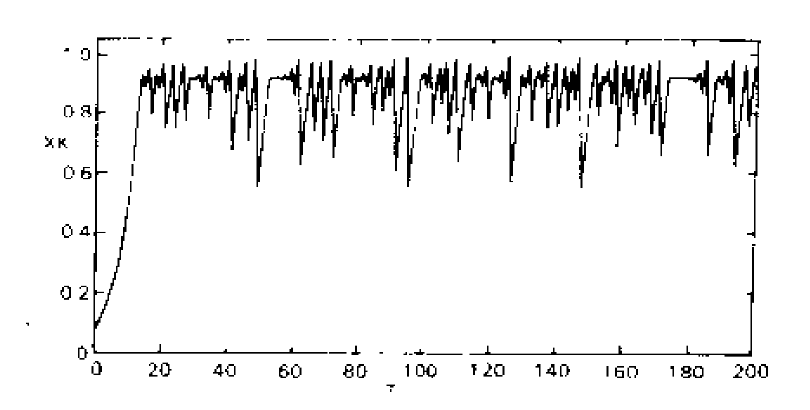


图 7.2 古典人口模型中混沌的出现

例 3 假定在(4.1)式中 $\beta=\lambda=1$，则生产函数呈二次形式

$$f(P)=AP(1-P) \tag{4.6}$$

如果也假定 $\sigma=1$ 和 $\lambda=1$，即像马尔萨斯的错误假设那样，允许人口具有每代倍增的自然增长率(实际增长率大约是他认为的值的一半)，则其结果与情况 1 相吻合，其中 $P^{*}=P^{**}=1/2$ 且 $P^{m}=A/4$。因而，我们发现判定混沌的充分条件是：

$$A^{2}(4-A)/16<P^{c},\quad \text{其中 } AP^{c}(1-P^{c})=1/2 \tag{4.7}$$

对于情况 1 的例子，在 $P_0\geqq P^{c}$ 的所有初始条件下，均存在维持生存阶段，因而在区间 $[P^{c}, A/4]$ 内有

$$P_{t+1}=AP_{t}(1-P_{t}) \tag{4.8}$$

前人对该方程已进行了大量研究，而且众所周知，混沌的临界点大约在 3.57 左右，略低于李—约克判定混沌充分条件所给出的值。因而，对于所有满足下式

$$3.57\leqq A<4 \tag{4.9}$$

的 A，混沌轨迹存在。

7.5 霍韦尔莫的马尔萨斯模型

在迄今为止所提出的例子中，诱发混沌的非线性均来自于生产函数的下降阶段。现在，我们通过令 $\gamma=0$ 来消除模型的这种特征，并展示当净出生人口由于工资低于维持生存水平而陡降时，修改的出生率方程是如何诱发混沌的。出于上述目的，我们考虑霍韦尔莫(1956)使用过的方程:

$$\Delta P/P=\eta-\delta/\omega \tag{5.1}$$

霍韦尔莫对马尔萨斯关于经济增长的洞察表示出极大的热忱。将(5.1)式与马尔萨斯的自然增长率约束结合起来得出下式:

$$\Delta P/P=\min\{\lambda,\eta-\delta/\omega\} \tag{5.2}$$

至此，得到人口方程:①

$$P_{t+1}=\min\{(1+\lambda)P_t,(1+\eta)P_t-\delta/AP_t^{2-\beta}\} \tag{5.3}$$

考虑情况 3，同样为了简单起见，我们计算 $P^*=[(\eta-\lambda)A/\delta]^{1/(1-\beta)}$。从(3.12)式中，我们得到不等式:

$$\frac{(1+\eta)P^m-(\delta/A)(P^m)^{2-\beta}}{P^m}\leqq\frac{\sigma}{(1+\lambda)^2} \tag{5.4}$$

它化简为:

$$1+\eta-(\delta/A)(P^m)^{1-\beta}\leqq\sigma/(1+\lambda)^2 \tag{5.5}$$

但对于情况 3，$P^m=(1+\lambda)P^*$，将它代入前面的不等式中，我们得到下列判定混沌的充分条件:

---

① 施蒂策(1980)研究了纯霍韦尔莫模型，它是通过将(4.12)式直接代入(5.1)式而得到的。而我们得到的马尔萨斯形式的模型具有能够对混沌充分条件进行定性分析的优势。这个形式也显示出更为现实的人口波动。

定会为其将来的老年生活制订现今的收支计划，并且会利用“理性预期”或具有完全的预见能力。此外，在对两代重叠进行模拟的模型中——在那里，经济活动主体依据一个时期相对较长的远景规划来制订计划——我们得到了不规则投资周期（见 Müller and Day 1978）。

由于此处讨论的这种轨迹是极不稳定和不可预测的——它使得参数或初始条件中微小的扰动可以导致轨迹发生巨大的偏离（或发散）——因此研究由模型生成的值的分布似乎是适当的。这种方法在遍历理论中已经被采用，并由洛伦兹及稍后的霍本斯台特和海曼应用于方程(4.3)。洛伦兹发现，作为(4.3)式中参数值 A 的一个函数的轨迹平均值，在区间 [3.8+,4] 内其自身是极不稳定的，当 A 接近于 4 时，表现出“狂暴的振荡”。霍本斯台特和海曼对不同的参数值 A 计算了密度函数，得到了类似的结果。并且，不仅密度函数从一个 A 值到另一个 A 值时会发生剧变，而且对于某些 A 值，密度函数自身也复杂得令人难以置信，在其函数值范围内表现出极大的振动。

李—约克的证明运用了斯梅尔(1966)创造的一种方法——包括研究叠代或生成函数 θ 的更高次幂。它显示出，时间通道具有延伸和折叠区间 J 的效果。在此区间内，该系统的历史受到限制。洗牌过程与上面提及的方法有些类似，它为周期值或多或少的随机涨落提供了一种直观上的解释。

图 7.3 说明了混沌的不稳定性。[1]图 7.3(A)说明了一个看来将达到静态的增长时期。然而，一个复杂的锯齿状模式

---

[1] 图 7.3(A)的参数值是：$\sigma=\beta=\gamma=1$，$\lambda=0.2$，$A=3.8284$，$P_0=0.11929$；图 7.3(B)的参数值除 $P_0=0.12$ 以外，其余均与(A)同。

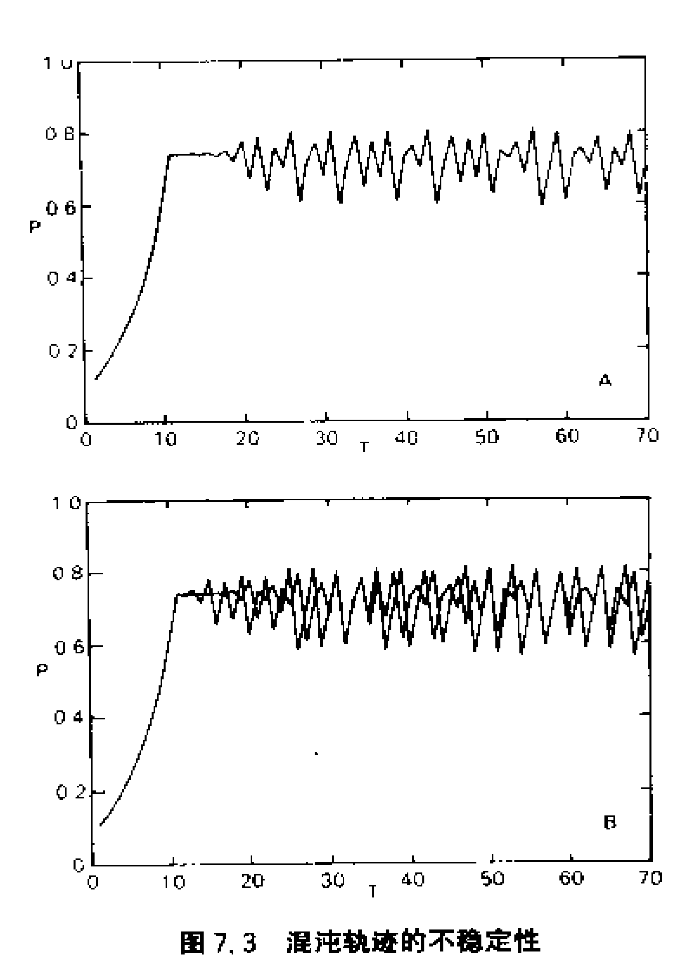


图 7.3　混沌轨迹的不稳定性

逐渐呈现出来。在图 7.3(B)中,一条新轨迹被叠加在图 7.3(A)的轨迹上。这是由初始条件变化 1%得到的。注意:一旦达到涨落的模式,两条轨迹的时间路径会迅速分开。还要注意,在 70 个时期内,两条轨迹在游走时几次彼此"接近",但每一次又都迅速分开!

附录

下面的工作将使本文中所使用的定义更加精确。

定义1 一个叠代映射 $x \to \theta^k(x)$ 是由 $\theta^0(x)=x$ 和 $\theta^k(x)=\theta(\theta^{k-1}(x))$ 递归地定义的。

定义2 如果对 $0<i<k$, $\theta^k(x)=x$ 且 $\theta^i(x)\neq x$, 则对于 θ, 一个点 x 是 k-周期的。

李天岩和约克(1975)给出了下列精确的混沌定义。

定义3 令 J 为 R(R 在 θ 下是封闭的)中的一个区间, 即 $\theta(x)\in J$, 所有 $x\in J$。假定存在着一个不可数集 $S\subset J$, 它不包含任何周期点, 从而使 x 在 θ 下是封闭的, 且

(a) 对于所有 $x, y\in S(x\neq y)$:

$$\limsup_{t\to\infty} |\theta^t(x)-\theta^t(y)|>0$$

$$\liminf_{t\to\infty} |\theta^t(x)-\theta^t(y)|=0$$

(b) 对于所有周期点 $x\in J$ 且所有 $y\in S$,

$$\limsup_{t\to\infty} |\theta^t(x)-\theta^t(y)|>0$$

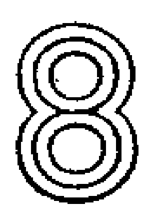
则该映射 θ [差分方程(2.1)]在 S 上是混沌的, 并且 S 被称为一个不规则集(scrambled set)

傅　琳

译自1983年《经济学季刊》

第三部分

经济混沌的经验证据



加总理论的货币总量是混沌的并具有奇怪吸引子：数学混沌的经济计量应用

威廉·A·巴尼特　陈　平

8.1 引言

目前，作为非线性动力学最新重大进展的结果，物理学中正在进行一场方法论的革命。在过去的十年中，有关奇怪吸引子、分岔理论、决定论的混沌的数学和物理学文献在诸多领域中越来越多地涌现。这些领域的大多数重大进展产生于非线性、决定论动态递归的数值叠代，并且需要使用计算机。在连续时间的应用中，计算能力特别重要。因此，过去十年中发生如此重大进展的事实就不足为怪了。文献中最新成就的例子是：对于脑电波行为、记忆恢复、流体中的湍流、昆虫种群行为、热对流动力学、跨世纪数据的气候行为、化学反应系统、光束弯曲、太阳黑子活动、等离子体中非线性波的相互作用、固体物理学、激光、地球磁场的自生机制、磁流体动力流

以及其他类似现象，都给出了确定性的解释，而以前这些现象却被认为具有内在随机性，超出了现存理论模型的解释能力。其应用包括理论和经验两个方面。尽管自然界中决定论混沌的第一次确定性的实验观察只在三年前才由物理学家进行，①然而低维混沌在自然界中普遍存在的事实早已变得很清楚了。

对这些文献兴趣越来越浓的理由是显而易见的。最近的进展展示了产生具有随机过程特征的决定性解的轨道的能力，这些特征是在实际数据中经常可见的。这些结论除了能有直接的经验应用外，不需要引入特定的附加或外生的随机特性，就可以直接从相关的结构理论中推导出来。而且，当模型的结构并不存在任何实际变动的时候，由此得到的解的轨道能显示出不可预测性和结构变化的外表。换句话说，不需要引入卢卡斯所说的任何“自由参数”也能获得这些甚至适用于非常长时期数据的经验上的有用结论。

一旦发现所观测到的数据能够从混沌吸引子模型中得到解释，那么便存在重新获得关于生成所观测数据轨道的未知模型信息的可能性。在本文中，我们要报告正在进行的一个研究项目的结果：我们在非常高质量的数据的长时间序列中，成功地找到了经济的混沌吸引子。特别要强调的是，这些吸引子能够解释广义的迪维西(Divisia)货币总量的动态行为，因而对于观测到的货币作用的时间轨道，可以揭示出产生这种轨道的动态系统本质的信息。揭示出的信息能用来测量可控制程度和对每一种考虑到的货币总量的加总误差程度。我

① 作者是从1983年有关文献的发表算起，到本文的发表为止，大约三年时间。——译者

向量 s_t 和动态系统 f 的选择方式，能在观测变量 m_t 的基础上决定性地解释现存数据。不过，就所有经济理论和科学的核心而言，有关混沌动态的文献总是力图对于观测到的数据路径给出最简节的有效解释。因此，我们将寻求最低维数的状态空间，它能对过去、现在和未来数据序列 m_t 的行为给出一个自我生成的、决定论的解释。我们预计所导致的最低维数可能是非常低的，因为已经证明非常简单和小型的新古典经济模型能产生很复杂的混沌动态。例如可以参见戴(1985)和格朗蒙特(1985)的著作。

我们完全以离散时间的形式进行理论表述，尽管类似地用非线性微分方程处理连续时间问题的文献同样存在。在连续时间情况下，问题的表述有某种程度的不同。被观测的变量 m_t 与状态向量加在一起构成一个 $S+1$ 维的联合系统向量。联合系统向量的行为被假定随时间连续地演化，并与对时间的一阶非线性微分方程系统相一致。通过重复地对时间微分，微分方程系统能简化为一个单变量 m_t 的、$S+1$ 阶的单一微分方程。因此我们看到，仅仅对一个单变量 m_t 进行观察，就足以使我们走出其自身的一维空间，并开始推断定义在未知状态空间上的动态系统 f 的信息。不过，在连续时间的文献中，通常用一个特定的程序，从连续路径上产生离散观测值。由这种程序生成的点的离散集叫做“庞加莱映象”(Poincaré map)。在本文的其余部分，我们只讨论离散时间的情况。不过，本文讨论的所有结果都在连续时间中有类似情况。例如，古根海默和霍姆斯(1983)在连续时间中观察到，“三维或大于三维的简单微分方程能具有复杂得令人震惊的解”。

如果函数 f 是单调递增或单调递减的，则状态向量的发展趋势将永远在一个方向上。这种简单的趋势在本文中不会产生有趣的（即显示出随机特性的）结果。因此，我们假定 f 至少有一个转折点，例如 f 是抛物线或者任何其他折叠函数。本文一个最显著的结果是在具有单峰动态叠代关系 f 的一维状态空间的情形中。在这种情况下，我们发现多数重要的极限特征〔如费根鲍姆(1978)描述混沌起始点的两个参数〕几乎完全不依赖于函数 f 的选择，只是函数 f 在其转折点中心时的特征发生作用。这种描述混沌起始点时几乎不依赖于函数 f 特征的现象叫做测度普适性。费根鲍姆这一著名的结论仅假设转折点是二次型的。

这些结果提供的另一个重要发现是，理论上存在内在的时间不可逆性。这一结论将源于以下事实：由于 f 的逆是集值的，f 中转折点的存在使得 f 不能逆变成一个函数。换句话说，尽管 f 是一个函数，f 的"逆"却具有二值对应。模型的这一特征从根本上区别于普通微分方程，因为微分方程原则上对于时间既可作向前积分，也可以作向后积分。

实际应用中，例如可以假定我们的数据发展趋势改变，因此 f 并非是单调函数。在非常一般和相当抽象的假设下，数学和物理学文献已经表明 m_t 可以用多种方式进行时间演化，从收敛成常数、到周期波动乃至具有已知的几乎各种随机过程特征的决定论混沌。这些可能的演化形式，包括产生不同形式之间转换的条件在内，大多数已经清楚。这种理论丰富性的来源是函数 f 的定义所产生的反馈，数学上被称作对偶递推关系。诱导反馈的动态来源于在所遇到的每一个自变量值对函数 f 进行的非线性叠代（f 收敛于不动点时除

从观察到的经济变量路径中有可能恢复关于未知动态系统的某些信息。我们预计，未知动态系统会产生具有随机特征的路径，而条件子系统会受到子系统外部的随机冲击。这些结论可能的例外是：存在由于测度误差引起的不容忽视的（高信噪比的）纯粹白噪声。因此，在数学混沌应用于经济学的经验分析中，数据质量非常重要。原则上说，噪声也可能直接存在于观测函数或者运动规律中，但是这种可能性在理论上不能令人信服，而且也是特定的。总之，关于带有白噪声的决定论混沌的文献尚属初级阶段，只能简单地进行讨论。

不同宏观经济学派的意见分歧就是对于在获得系统动态之源问题上所需建模深度的意见分歧。凯恩斯主义者通常认为系统动态来源于私有部门的经济内部。货币主义模型需要将中央银行的反应函数内生化。理性预期的建模以及与之相关的"新古典经济学"方面的文献提出了他们自己的动态模型，他们通常需要将私有部门（尤其是关于相对价格）的预期内生化，使其与经济结构一致，同时也要将政府对私有部门的冲击之源内生化；得到的经济计量规范揭示了经济的"深度参数"。三种传统学派模型的共同之处是线性假设，但这在三个传统流派中都很少被看成是固有的，而只是简化的局部近似。实际上，关于内生经济周期的杰出文献在三种传统学派中都存在。例如，可参见卢卡斯（1981）的理性预期传统建模方法。我们所用的混沌动态的经验推断技术不必预先假定使系统动态内生化所需的建模深度，因此它不依赖于某个人关于系统动态之源的意见。

来越开。最终，各分岔点将依次在预期的参数值被通过，每次分岔发生时，聚点的数目便翻倍，因为在分岔时每一个聚点产生自身的新2-周期，而吸引子中的每一点也同时分岔。因此，分岔产生了倍周期。当我们从一个分岔点转到下一个分岔点时，产生分岔的两个旋钮设置间的距离越来越近，而这个距离可以从称作费根鲍姆数的收敛速率常数精确地预测到。当吸引子集合中点的数目增加时，可以产生的被观测行为种类的潜在丰富性也增加了。如果行为是周期性的，吸引子便是一个闭圈（极限环）。如果行为是 n 周期的，吸引子便是 n 维环面。在所有情况中，最初靠近的那些点将永远保持接近状态。

在极限条件下，无限的分岔序列收敛后，吸引子集合可以具有无限数目的点。在这种会发生向"混沌"过渡的情形中，吸引子集合通常是一个分形，也就是具有豪斯道夫分维的康托尔集。分形是曼德勃罗（1977）提出的著名集合。这时，我们说吸引子集合是混沌的，或者说是"奇怪"吸引子。分岔序列收敛成分形集合的旋钮设置是有限的，因此收敛于混沌态的旋钮设置实际上是可以达到的。混沌不是只在不可及的极限处才能逼近的例外情况。

已经证明，奇怪吸引子的存在对于混沌既不是必要条件，也不是充分条件。不过，实际上在所有已知的混沌的有效应用中，奇怪吸引子总是存在的。因此，我们应将混沌动态的存在等同于导致时间路径通向混沌的奇怪吸引子的存在。吸引子中有些点是稳定点，有些点是排斥点。奇怪吸引子的潜在解释能力是巨大的，因为它能"吸引"一个序列遵循决定论的行为，这种行为十分复杂和紊乱，以至于看来是随机的。例如，在混沌状态中，某些起因值产生的轨道会收敛于非吸引子

点。这种轨道叫做非周期轨道。由于存在对初始条件的敏感依赖，因而相互靠近的点并不永远保持靠近，事实上，它们一般从开始便会以指数速率发散。不过，这种路径不会无限制地发散，因为所有的轨道最终会被有界的吸引子集合捕捉到。

既然从起因邻近产生的轨道一开始便（以指数速度）快速发散，对所发生的现象采取“统计”观点便很自然了。另外，在由此产生的混沌中可以找到数学上有序的优美形式。这种有序比过渡到混沌前的透明状态的有序更优美[参见普里戈金和斯滕格(1984)的论文]。特别是，奇怪吸引子（一般来说也包括分形）显示出详细的无限回归特征，当我们越来越近地注视吸引子集合的外貌时，我们就像看到一个永不结束的、一个模式在另一个模式内的嵌套过程。奇怪吸引子的这一特性叫做尺度不变性。在物理学中已经证明，耗散系统通过湍流现象通常能产生数学混沌，这里耗散系统被定义为一个随着时间的流逝，因摩擦而释放出熵来的系统。显然，在自然界中耗散系统是普遍现象，而非例外。

8.2.3 混沌动态和奇怪吸引子的经验推断能力

检测混沌的许多技术被广泛应用于物理学中，例如谱分析、对最大李雅普诺夫指数的计算、庞加莱截面和分谱波频闪观测器等。不过，不是所有由物理学家发展出的方法都能在经济学中应用，因为这些方法大多数需要大量数据以保证其充分精确。例如，一个典型的决定论混沌的能量谱分析需要10000多个数据点。在本文中，我们只使用那些含少于1000个数据点便能潜在有效地检测混沌的分析技术。关于检测和计量混沌的物理文献仍然处于起步状态，但是两种技术在经

济学中的应用特别有潜力。一种技术是计算吸引子的维数，如果要有效，它就必然是有限的、分数的和小规模的。另一种技术是计算轨道的李雅普诺夫指数。即使当样本规模较小时也能使用的另外两种技术是考察相图和自相关函数。另外，某些经典统计方法也能应用，包括时间序列频域技术。在本节中，我们将分别讨论这五种技术，不过我们首先要描述相空间与状态空间之间的基本关系。

8.2.3.1 相空间的嵌入

我们可以证明，奇怪吸引子从来不是具有整数维数的拓扑流形，而是具有非整数维数、零体积(相对于勒贝格测度)的康托尔集，即分形。在豪斯道夫测度(通过豪斯道夫覆盖定理)基础上建立的测度理论方法能够测量分形的维数。由此得到的奇怪吸引子的非整数值的维数叫做分维，它测量与系统动态行为相关的独立自由度的数目。概括地说，一个集合的维数是在给定的精确度内确定集合中一个点的位置所需要的信息量。如果吸引子是欧几里得体，下面描述的任何测量吸引子维数的方法都会得到吸引子的欧几里得维数。吸引子被定义为“奇怪的”，当且仅当吸引子的维数是非整数值，也就是吸引子是分形时。

尽管我们通常不能得到状态向量 S_t 的测量值，但是吸引子集合仍是状态空间的子集。我们仅有 m_t 的测量值。因此，找到一种工具，建立起分维与 m_t 潜在值的联系非常重要。塔肯斯(1980)利用嵌入定理，进行了这方面的工作，它可以理解如下：从吸引域集合中选一个状态向量，对 (g, f) 进行 $n-1$ 次叠代，产生 m_t 在 n 时的一条轨道(n-轨道)；然后将由

此得到的 m_t 的 n 个值堆成 n 维向量。如果 n-轨道的第一个观测值是 m_t，我们能由 $m(n)_t$ 在 t 处构造一个 n-轨道，在这里，对于每个 t，

$$m(n)_t=(m_t, m_{t+1}, \cdots, m_{t+n-1}) \tag{2.1}$$

在下面的讨论中，尽管在实际情况中相空间的坐标一般是依次多周期滞后的，但为了简化叙述，我们仍然采用依次单周期滞后的假设。这时，对于预先选定的 τ 周期的时间延迟，我们能得到对每个 t 的 n-轨道：

$$m(n, \tau)_t = (m_t, m_{t+\tau}, m_{t+2\tau}, \cdots, m_{t+(n-1)\tau}) \tag{2.2}$$

很容易理解，无论何时方程中出现 $m(n)_t$，在实际中应该用 $m(n, \tau)_t$ 代替它。自变量 τ 的存在可在下面的讨论中得到解释。选择延时 τ 的信息论准则是由弗雷泽和斯文尼提供的。

对于一个给定的 n，这些 n-轨道 $m(n, \tau)_t$ 的空间叫做相空间，所选择的 n 值叫做嵌入维数。按照这种方式的定义，相空间有延时坐标。吸引域集合中的状态向量，在所有可能的初始条件下的相空间轨迹集合叫做系统的相图。有时，相图也可指实际观测数据在相空间中产生的 n-轨道的轨迹。

8.2.3.2 维数测度

假定对于一个固定嵌入维数的 $m(n)_t$ 的构造是在吸引域集合内 s_t 所有可能值的重复。得到的 n-轨道向量集合用 $J(n)$ 表示。然后计算 $J(n)$ 的豪斯道夫维数，并对于依次变大的 n 值重复这一计算。塔肯斯(1980)证明，当 $n\rightarrow\infty$ 时，$J(n)$ 的极限维数等于奇怪吸引子在状态空间中的分维，我们称此定理为塔肯斯嵌入定理。因此，我们仅仅根据 m_t 的可观测

值确定 n-轨道 $m(n)_t$，就可以确定状态空间中奇怪吸引子的维数。实际上，塔肯斯证明了更有力的结论。他证明了对于任何固定的嵌入维数 n，在相空间中存在一个决定论动态系统(对偶递归关系)F_n，使得状态空间中 $s_{t+1}=f(s_t)$ 的动态特性(特别是所有共轭不变量)和相空间中 $m(n)_{t+1}=F_n(m(n)_t)$ 的动态特性存在一一对应关系。这些不变特性包括李雅普诺夫指数(后面将作讨论)、维数和熵的概念。因此，当且仅当状态空间中存在奇怪吸引子时，相空间中也存在奇怪吸引子，而且两个空间中吸引子的维数是一样的。很明显，由于对于足够大的 n，吸引子是该相空间的一个子集，所以要在相空间中测量维数，选择的嵌入维数一定要超过吸引子维数。

奇怪吸引子的豪斯道夫维数，无论是在相空间中计算，还是在状态空间中直接计算，都是特别困难的。因面有人提出了较容易计算的近似方法。最引人注目的例子是格拉斯博格—普罗卡恰的相关维数和信息维数。已经证明，相关维数总是小于信息理论的"信息维数"，面信息维数又总是小于豪斯道夫分维。既然大于分维的下一个整数通常作为状态空间维数的下界，那么相关维数便是三个维数中最保守的一个。实际上，物理学家们认为格拉斯博格—普罗卡恰(1983a,b)方法最好，因为它具有保守性、计算简洁性和它自身特有的理论价值。

我们首先定义测量 $J(n)$ 维数的格拉斯博格—普罗卡恰方法。由这种方法产生的维数尺度叫做 $J(n)$ 的相关维数，其中这一方法所用的相关函数 $C_n(\epsilon)$ 定义为：

$$C_n(\epsilon)=\#\{(i,j):\|m(n)_i-m(n)_j\|<\epsilon,\ 1\leq j\leq N_n, 1\leq j\leq N_n\}/N_n^2 \qquad (2.3)$$

这里 $N_n=N-(n-1)\tau$ 是由带有延时 τ 的规模为 N 的样本产生的 n-轨道数，# A 指集合 A 的基数(即集合中的特殊点数)。特别要强调的是，$J(n)$ 的格拉斯博格—普罗卡恰相关维数定义为：

$$D(n)=\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{N\to\infty}(\log_2 C_n(\epsilon)/\log_2\epsilon) \tag{2.4}$$

如果我们对嵌入维数趋近于无限时取极限，正如塔肯斯嵌入定理所指出的那样，我们得到状态空间中奇怪吸引子的相关维数：

$$D=\lim_{n\to\infty} D(n) \tag{2.5}$$

在实际处理一个良好的混沌模型时，在某一个 n 的有限水平上，$D(n)$ 的值将会"饱和"(也就是说达到它的极限)，叫做饱和嵌入维数 n_s。因而奇怪吸引子的相关维数是 $D(n_s)$。在相反的极端情况，如果数据是白噪声，饱和态永远不会达到。这时，每一个嵌入维数的数据都要用到相空间的所有维数，并且对于所有 n，$D(n)=n$。所以 $D=\infty$ 即是白噪声情况。

方程(2.4)的道理从下列事实中很容易明白：当 ε 足够小、N 足够大时，格拉斯博格和普罗卡恰证明相关函数可以近似写成如下形式：

$$\log_2 C_n(\epsilon)=\log_2 k+D(n)\log_2\epsilon \tag{2.6}$$

这里 k 是个常数。因此，(2.6)被 $\log_2\epsilon$ 除，并且令 $\varepsilon\to 0$，便得到(2.4)方程。从(2.6)我们发现，$D(n)$ 可以作另一种定义：

$$D(n)=\lim_{\varepsilon\to 0}(\partial\log_2 C_n(\epsilon)/\partial\log_2\epsilon) \tag{2.7}$$

事实上，这是实际采用的形式。方法是选取一个较小的

ϵ 值，但并不是零，因为当 ϵ 值非常小时，数据噪声会极其显著。结果，方程(2.7)比(2.4)得到更广泛的应用，因为对于小的非零 ϵ 值，$\log_2 C_n(\epsilon)/\log_2\epsilon$ 对于 $\log_2\epsilon$ 的图的截距不为零。

特别是，在相对 $\log_2\epsilon$ 画出 $\log_2 C_n(\epsilon)$ 曲线时，我们能测量对于 $\log_2\epsilon$ 的斜率 $\partial\log_2 C_n(\epsilon)/\partial\log_2\epsilon$。当 $\log_2\epsilon$ 的值足够小时，在噪声开始显著之前，斜坡变为平台。我们把沿着平台的斜率值用作 $D(n)$ 的值。

为了很容易判定平台的边界，斜率值是相对于 $\log_2\epsilon$ 画出的，从由此得到的图形中可以考察在嵌入维数为 n 时平台的左边界 $\log_2\epsilon_L(n)$ 和右边界 $\log_2\epsilon_R(n)$。相对于 $\log_2\epsilon$ 作出 $\log_2 C_n(\epsilon)$ 的图，可以判明其线性区域的左右极限，$\log_2 C_n(\epsilon)$ 的值是对 $\log_2\epsilon$ 的线性回归。回归中所用的点是 $\log_2 C_n(\epsilon)$ 相对于在 $\log_2\epsilon_L(n)$ 和 $\log_2\epsilon_R(n)$ 之间的 $\log_2\epsilon$ 作图所得的所有点。线性回归的斜率便是 $D(n)$ 的估计值。当 n 从 $n=1$ 不断增加(直到饱和嵌入实现)时，这一处理程序重复进行。重要的是不要超过饱和嵌入维数的最低值，否则当嵌入维数增加时相空间的观测数会急剧减少。由于相空间的点很少，判明线性区域(2.6)的能力很快消失。根据(2.5)式，$D(n)$ 的极限值(用 $D(n)$ 在饱和嵌入维数处的值进行近似)便是分维 D。

尽管对于所有有限的 n，$D(n)$ 来源于相空间的向量，我们仍然根据塔肯斯嵌入定理预期 D 会在状态空间中测量奇怪吸引子的维数。格拉斯博格和普罗卡恰曾证明 D 实际上的确可以写成以状态变量 $s_t(1\leqslant t\leqslant N)$ 表示的形式：

$$D=\lim_{\epsilon\to 0}(\log_2 C(\epsilon)/\log_2\epsilon), \tag{2.8}$$

其中

$$C(\epsilon)=\lim_{N\to\infty} \#\{(i,j):\|s_i-s_j\|<\varepsilon,1\leqq i\leqq N,1\leqq j\leqq N\}/N^2 \tag{2.9}$$

相关函数通常被调整成消去(i, j)对，使 $i=j$。此时方程(2.3)和(2.4)变成

$$\begin{aligned}C_n^*(\epsilon)= \#\{(i,j):&\|m(n)_i-m(n)_j\|<\epsilon,\\ &1\leqq i\leqq N_n,1\leqq j\leqq N_n,i\neq j\}/(N_n^2-N_n)\end{aligned} \tag{2.10}$$

以及

$$\begin{aligned}C^*(\epsilon)=\lim_{N\to\infty} \#\{(i,j):&\|s_i-s_j\|<\epsilon,\\ &1\leqq i\leqq N,1\leqq j\leqq N,i\neq j\}/(N^2-N)\end{aligned} \tag{2.11}$$

在我们的研究中，我们使用这些调整过的相关函数。

对于充分大的 n，N，极限相关维数能够合理精确地获得。格拉斯博格和普罗卡恰证明极限相关维数 D 小于、但非常接近奇怪吸引子的豪斯道夫分维。我们使用格拉斯博格—普罗卡恰方法计算奇怪吸引子的分维。

大于奇怪吸引子分维的下一个整数提供了包含吸引子的空间维数的下界。而且，既然吸引子集合是状态空间的子集，那么大于分维的下一个整数也提供了状态空间维数的下界，这个状态空间包含了能够产生 m_t 观测轨道的状态向量路径 s_t。既然格拉斯博格—普罗卡恰相关维数 D 小于豪斯道夫分维，我们可以认为奇怪吸引子的相关维数 D 也是状态空间 S 维数的下界。

如果状态向量轨道是根据与(f, g)的存在相应的决定论

动态模型产生，那么前面的结论（包括预设极限的存在）都能成立。这是一个有力的结论，因为它表明：变量数目的下界能用于产生关于 m_t 内在演化的完整理论解释。这些结论来源于 $m_t=f(s_t)$ 及 s_t 的维数是 S。然而，重要的是必须明白，产生 m_t 观测路径的最简单的决定论混沌模型不必是实际产生观测数据的模型。实际上，在实验应用中分维大大小于产生观测数据的变量数目。只有当吸引子不是混沌的（即不是"奇怪的"）时候，下界才是严格的。

正如我们上面提到的，尽管完全来源于确定性的起始点，被牵向奇怪吸引子的路径会表现为随机过程。另外，可以用整个集合中点的分布来定义吸引子集合上的概率测度。按照这种方式，可以将路径解释为随机过程的实现，同时完全决定论地解释了概率测度之源。如果吸引子集合的测度和可能路径的测度被用来导致吸引域集合上的概率分布，而吸引域集合定义为所有解的可能路径起始的初始条件集合的闭包，那么对随机行为的解释就变成完全是一种惯例。结果是建立了决定论结构理论和产生观测数据的被观测随机过程概率分布之间的联系。

如果分维是无限的，对路径进行决定论的解释就变得无限复杂，于是只能嵌入一个无限维的状态空间。实际上，需有无穷数目的变量才能"决定论地"解释路径。如果根本不存在决定论的解释，事实上就会发生这样的情况，因而真实世界仅仅是白噪声，无论我们多么深层次地探究所观测到的动态之源，都是如此。

估计所需样本容量存在一个半经验公式。例如，在麦基—格拉斯模型中，估计吸引子维数所需的最少数据点数大约

是 $N_{\min}=21.5^D$，这里 D是吸引子维数。因此，测量二维吸引子维数的最小样本容量至少是 460 个，而 10000 个样本容量才能测量三维吸引子的维数。在少于 1000 个观测数据时，能够合理测定的最大维数必然是二维和三维之间的分维。很明显，目前的经济数据和方法只能发现低维吸引子。

维数估计的标准误差可以利用塔肯斯(1984)提出的概率测度求得。

8.2.3.3 测量混沌的李雅普诺夫指数

李雅普诺夫指数提供了多种类型的信息，它描述了混沌轨道游荡行为的特性。我们认为，刚开始轨迹之间非常接近，然后，我们在各种不同局部定义的正交方向上计算长期平均速率，按这一速率轨迹随时间发散或收敛。可以证明，最受吸引子牵引的所有轨迹行为可以用有限个李雅普诺夫指数进行描述。一个指数必定是零，其他一些指数是负值。在一个良好定义的系统中，所有李雅普诺夫指数之和是负数。在李雅普诺夫指数中，最大的指数特别重要，因为它的倒数是路径(m_t)长期演化的确定性预测能力极限的测度。如果动态系统是混沌的，那么致少有一个正李雅普诺夫指数，它反映了轨道从初始条件附近开始的指数发散速度。正的最大李雅普诺夫指数可以用作数学混沌的定义。因此，最大李雅普诺夫指数的符号比它的数值更重要。最大李雅普诺夫指数可以区分奇怪吸引子和普通整数维(拓扑流形)的吸引子。也就是说，这种方法可以用于区分混沌和周期过程，但这种方法在区分混沌和白噪声时是无能为力的。混沌与白噪声的比较通过考察自相关函数的行为才更为有效。

利用状态空间的轨道，李雅普诺夫指数可以正式定义如下。令f^k代表f的k次自身合成，如f^3定义为$f^3(s_t)=f(f(f(s_t)))$。让H_{kt}代表$f^k(s_t)$的海赛矩阵，$a_{it}(k)$表示H_{kt}的第i个本征值，本征值的排序是$a_{1t}(k)\geqslant a_{2t}(k)\geqslant\cdots\geqslant a_{St}(k)$，这里$S$是状态向量$s_t$的维数。第$i$个李雅普诺夫指数$\lambda_i(t)$定义为：

$$\lambda_i(t)=\lim_{k\to\infty}(1/k)\log_2 a_{it}(k),\quad i=1,\cdots,S,\qquad(2.12)$$

一旦轨道完全被吸引子集合所捕获，则对于吸引子集合中的所有s_t，这里的$\lambda_i(t)$不依赖于演化时间。因此，李雅普诺夫指数只在吸引子集合里面进行考虑。李雅普诺夫指数向量$\lambda_1(t),\lambda_2(t),\cdots,\lambda_S(t)$被称作李雅普诺夫谱。最大的李雅普诺夫指数是：

$$\bar{\lambda}(t)=\max\{\lambda_i(t):i=1,\cdots,S\}\qquad(2.13)$$

我们用状态向量的方式，而没有用观测变量m_t的方式表述方程(2.12)，仅仅是为了记录的方便。实际上，在相空间用$g(f)$代替f，可以进行类似的定义，从而使方程(2.12)可以用观测数据进行计算。由于状态空间和相空间的关系，对于足够大的嵌入维数，在任一空间中计算的李雅普诺夫指数是相等的。

我们利用沃尔夫等人(1984)著作中的算法，计算最大的李雅普诺夫指数$\bar{\lambda}(t)$。他们的论文中还提供了用低通滤波器来处理噪声的方法。对于无限大的样本容量，这种算法收敛于最大的李雅普诺夫指数；对于有限样本容量，这种算法是对该李雅普诺夫指数的近似。

沃尔夫等著作中的算法，在合适区域上的固定时间间隔，相对于演化时间t绘出了最大的李雅普诺夫指数$\bar{\lambda}(t)$的数值

8.2.3.6 时间序列统计推断方法

相关维数和最大李雅普诺夫指数的计算能产生决定论混沌的可信证据。不过，这些检验采用了统计特性未知的点估计。理由是它们直接基于混沌的定义，因而是建立在决定论数学的基础之上。不过，正如观测所示，对混沌动态产生的轨道能够给予一个随机性解释，过程的分布能够从决定论的动态中直接推导出来。利用随机性解释尚没有产生许多结论，但是，基于海因奇(1982)的非线性双谱测试的混沌统计检验已被阿什利和帕特森(1985)提出。他们表明，海因奇测试能够检测某些混沌递归必需的非线性特性。该测试以经典统计方法为基础，因而是有效的。但是，所测试条件不是混沌的充分条件，只是某些混沌递归的必要条件，包括一些最重要的混沌递归。不过，海因奇的非线性测试仍然是重要的，因为非线性特性是行为差异的核心，即以戴和格朗蒙特的混沌模型为一方，以著名的凯恩斯主义线性宏观经济计量模型和卢卡斯类型的线性理性预期模型为另一方的行为差异的核心。

我们并不关心基于经典统计理论的对数学混沌的任何直接检验，尽管卡拉巴和泰斯特费森(1980)的方法可以适用于这一目的。

8.3 数据要求

8.3.1 主要观点

前面已经提到，在应用现有技术探讨非线性系统动态时，数据质量非常重要。测度误差产生的白噪声使得用现有方法

从奇怪吸引子中提取信息复杂化，因为这种数据错误在奇怪吸引子集合中产生模糊印象。另外，测度变量 m_t 非常"重要"这一假定看起来是合理的，因为目前所有从混沌轨道中提取经验信息的经验技术只用了一个变量的观测轨道，以在状态空间中重构完整系统的动态。

认识到下面这一点非常重要：即并不存在固有的理由要我们相信经济数据比物理学数据噪声更多。经典统计学的许多技术要求大多数变量是外生的，完全非随机性的外生变量一般只能作为受控实验的控制变量而得到。因此，通常认为应用于经济数据(它们一般都不来自受控实验)的推断过程被经济数据的"噪声"复杂化了。许多内生变量的联合偏差当然是经典统计推断过程中的一个难题，但内生性并不是奇怪吸引子理论的一个难题。内生和外生变量的区别与混沌无关，实际上混沌动态的作用在于产生呈现随机性的解的路径的能力。完全决定论的数学混沌的有效性只需要数据是高质量的，从而使测度误差引起的大量白噪声不会出现。

没有理由相信完全分散的经济数据本身具有更多的噪声，也就是说比物理学的受控实验数据有更高的测量误差。当然，几乎所有经济数据都是对商品和经济活动主体的加总，而加总的确会将白噪声带入加总数据。因此，决定论混沌和奇怪吸引子理论的经验应用的问题并非经济数据不是来自于受控实验，而在于数据是加总的，而加总偏差会将噪声引入总量数据。

大多数政府数据来自于拉斯佩尔斯指数或帕许指数(Laspeyres or Paasche Index)，它们只是真正加总理论总量的一阶近似。由此产生的二阶剩余项对于物理文献中现

见巴尼特(1982 b, 1983 a, 1984)和巴尼特、奥芬巴彻、及斯平特(1981, 1984)的文章。最近,巴尼特(1987)引入了迪维西供给货币总量,它建立在具有关于金融中介货币资产供给的传统新古典模型的供给方总量理论基础之上。汉考克(1985, 1986)提出的一个金融企业的类似模型,被他(1987)用于对供给方货币加总的经验研究。

正如本文的理论和经验研究所表明,非常不幸的是加总理论的精确货币需求总量并不总是等于加总理论的精确货币供给总量。这样便产生了潜在的复杂性,即使两个总量都是对相同部分的迪维西加总,而且所有货币部分的市场都是连续出清的。这个悖论来自于强制零收益率准备金的存在。管制约束以无法避免的投资利息形式对金融中介征收了一种隐含税。金融中介的一部分储蓄是零收益,其余部分得到市场收益。不过,储蓄者存在一个给定帐户上的每一个美元都得到了同样的边际收益。

迪维西需求货币总量和迪维西供给货币总量共同依赖于每个部分的数量和使用者成本价格,而后者是税后各部分收益的函数。因此,即使所有部分的市场都是连续出清的,需求和供给总量也可以不相同,因为金融中介和储蓄者所看到的"(隐含的)税后"部分收益不同。对准备金征收的隐含税在资产需求者所付的使用者成本和资产供给者收到的使用者成本之间插入了一个管制中间物。

简单地说,在总量货币市场双方之间出现古典管制中间物,它是对市场双方进行不对称征税的结果。由于对市场双方的直接税率不同,同样的复杂性也可能产生在许多商品市场,包括货币市场中。

如果迪维西货币要求总量与相应的迪维西货币供给总量之间差异较小，我们可以仅选用两者之一。在建模中结果将会大大简化，因为我们能用一种总量货币需求和总量货币供给函数来产生一个市场，在这个市场上货币总量是出清的。为此，迪维西货币需求总量与迪维西货币供给总量之间的差异必须不具有统计显著性，从而使我们能将它们当成是来源于相同的分布。巴尼特、海因奇、韦伯(1986)曾经证明：迪维西货币需求总量和相应的迪维西货币供给总量的谱的差异在所有的频率上不具有统计显著性，以及在所有的频率上，两者具有高度的凝聚性。不过，通过使用希尔伯特变换法，他们证明：在高频率段内，相应的指数之间存在细微的动态差异。既然我们直接处理非线性动态，我们就需要同时采用迪维西需求和迪维西供给货币总量。

8.4 需求方货币加总及指数理论

8.4.1 加总理论

货币资产的需求者被认为在一系列预算约束下追求跨时效用的最大化；或在给定技术约束下追求最大的利润贴现值，这可以被表示成跨时变换函数。每一笔货币资产的实际余额以效用或变换函数的形式出现。这种效用或变换函数在一般均衡理论中是导出函数，并且如果货币在均衡中出现正值就总是存在。简而言之，我们从传统新古典理论出发，将其应用到消费者对货币资产的需求和企业对货币资产的需求。我们进一步假定每一个经济活动主体的效用或变换函数在当前货币资产的组合上是成块弱可分的。对这些假设的检验，参见

数量指数，它是著名的康努斯实际生活费用指数的对应物。在函数 u 是齐次的特例中，马姆奎斯特指数变成函数 u 除以它的基期值。因此，在这种基本情况下，函数 u 自身便是数量加总函数。

8.4.2 指数理论

现在，我们能通过估计函数u来估计消费者或企业的精确货币数量指数。如果u是线性齐次函数，那么u自身便是数量加总函数。如果u不具有线性齐次性，那么从u导出的距离函数是精确数量加总函数。不过，对u的估计产生的总量依赖于u的经验表示式和它的参数估计值。实际上，依赖于表示式和参数估计值的指数很少被提供数据的政府机构采用。

对这一实际问题的解决办法是使用非参数方法估计加总理论中未知的精确总量函数。统计指数理论这一领域正是为此目的而存在的。统计指数被定义为仅是数据的函数，而不是任何未知参数的函数，尽管统计数量指数确实同时依赖于价格和数量。另一方面，包含未知参数的加总理论的精确总量函数仅仅依赖于数量数据。

近年来，我们从新的理论成果中越来越清楚地看到：最好的连续时间的统计数量指数是迪维西指数，最好的离散时间数量指数是迪维西指数的特恩奎斯特(辛普森规则)离散时间近似值。在连续时间且 u 是齐次函数时，迪维西指数准确地反映了精确总量函数。在离散时间时，迪维西指数的特恩奎斯特近似值(我们简称为离散时间迪维西指数)以非常低的误差反映了精确经济总量函数，不管 u 是否具有齐次性。即使函数 u 在时域上是变动的，这一结论仍然成立。参见卡韦斯、

克里斯坦森和迪沃特(1982 a, b)的文章。

无论是离散时间还是连续时间，迪维西指数计算的是各部分数量增长率的加权平均值，即数量总量增长率。权数是支出份额。在连续时间里的时刻 t，部分 i 增长率的权数是第 i 种商品的瞬时份额 $s_{it}=m_{it}\pi_{it}/m_t'\pi_t$。在离散时间的周期 t，部分 i 增长率的权数是第 i 种商品的平均份额：

$$\bar{s}_{it}=\frac{1}{2}(s_{it}+s_{i,t-1})$$

其中 s_{it} 是这一周期的份额，$s_{i,t-1}$ 是上一周期的份额。

8.5 供给方货币加总和指数理论

8.5.1 加总理论

金融中介是货币资产的供给者。这种企业被认为在给定技术约束下追求最大的利润贴现值，这可用跨时变换函数表示。产生的货币资产的实际余额是变换函数的产出。我们假定在所产出货币资产的本期向量上变换函数是成块弱可分的。这一假设的经验检测，参见汉考克(1987)的文章。

巴尼特(1987)证明金融中介可以被看成是求解一个简单的本期问题，因为本期条件决策的解是求解企业全部跨时决策所必需的。本期条件决策是选择货币资产产出数量向量 μ_t 的值，使得

$$\text{在 } f(\mu_t,k_t)=M_t \text{ 条件下，令 } \mu_t'\gamma_t \text{ 最大化} \qquad (5.1)$$

其中 $\mu_t=(\mu_{1t},\cdots,\mu_{Nt})'$ 是本期金融中介 N 个产出的实际余额，$\gamma_t=(\gamma_{1t},\cdots,\gamma_{Nt})'$ 是这些资产的实际使用者成本价格向量，k_t 是 N 种资产的准备金比率向量，M_t 是货币服务的总产量。

简单地说，金融中介使收益最大化，其约束条件是给定（有可能从前一阶段的总量决策所定）的货币服务产量，它是被使用的要素数量的函数。函数f是弱可分的子函数，它存在于变换函数内部。函数f叫做要素必备函数，它是单调递增且是严格凸性的。决策(5.1)中的约束条件在给定要素使用水平上限定了生产可能性边界，因为M_t是要素数量的函数。生产可能性边界是凹向原点的。

可以证明（参见Barnett 1987）由金融中介产生的货币资产i的实际使用者成本价格是：

$$\gamma_{it}=[(1-k_{it})R_t-r_{it}]/(1+R_t) \qquad (5.2)$$

其中R_t是金融中介再贷出一美元能产生的最大收益，r_{it}是金融中介对货币资产i（存款帐户类型）所支付的收益。极类似的结论，参见汉考克（1985，1986）的文章。

很明显，如果k_{it}等于零，方程(5.2)的使用者成本等于方程(4.2)的使用者成本。我们发现，在不需要资产准备金时，在市场双方所见利率相等的极普通的简化假设下，货币资产i的使用者成本，对于需要该货币资产的每个企业、每个消费者和提供该资产服务的每个金融中介都是同等的。

收益可以写成如下的形式

$$\mu_t'\gamma_t=\mu_t'\pi_t+R_tk_t'\mu_t/(1+R_t) \qquad (5.3)$$

其中π_t是(4.2)式中货币资产需求者的使用者成本。因而很清楚，方程(5.3)右方的第二项是隐含税的贴现值（从时间间隔开始算起），隐含税是金融中介因为准备金的存在而“支付”的。如果我们不用分母相除进行贴现，我们便得到期末税收，这就是准备金的预定利息。贴现税收或者期末税收都可以通过测量μ_t的名义美元值，来估价其名义值，而不是实际美

元值。

在一般情况下，决策(5.1)所产生的精确经济数量总量是在一个固定要素数量参考水平上作为一个μ_t函数的产出距离函数。产出距离函数的定义和解释类似于方程(4.3)中的投入距离函数。参见巴尼特(1987)的文章。当用其基期值相除进行减缩时，产出距离函数变成马姆奎斯特产出数量指数。在函数f是线性齐次的特例中，马姆奎斯特产出数量指数变成除以其基期值而减缩的函数f。因此，在这种基本情况下，f自身便是产出数量的总量函数。

8.5.2 指数理论

现在再次产生了需要对精确产出数量总量进行非参数近似的问题，尽管我们现在讨论的是产出数量总量，而已知的最好统计指数仍然是连续时间的迪维西指数或它的离散时间的特恩奎斯特(辛普森规则)近似值。公式与4.2节所述相同，只不过用供给数量μ_t代替需求数量m，用收到的使用者成本γ_t代替付出的使用者成本π_t。既然在准备金不为零时π_t不一定等于γ_t，即使每一个部分的市场都是出清的，在这些部分之上计算的迪维西需求货币总量也不一定等于迪维西供给货币总量。这里存在一个管制的中间物，关于中间物含义的进一步理论探讨，以及在一个消费者和一个金融中介情况下的几何图解，可以参见巴尼特、海因奇和韦伯(1986)的论著。

8.6 结果

我们应用前述方法，对四种迪维西货币需求总量、四种迪维西货币供给总量和四种简单求和货币总量，进行混沌检测。为了比较，我们对自 1962 年 7 月 2 日起的 IBM 公司每日普通股收益进行了 2000 次连续观察，在此基础上画出了相图和自相关函数曲线。货币总量数据是自 1969 年 1 月起的每星期数据。在货币加总的 $M1$、$M2$ 和 $M3$ 水平上，我们的数据开始于 1969 年 1 月，结束于 1984 年 7 月，共包括 807 个星期观测数值。在加总的最高水平(联邦储备称其为 L 水平)上，我们的数据包括自 1969 年 1 月起的 798 个星期观测值。其他 9 个在 L 水平上的加总数据还没有得到。

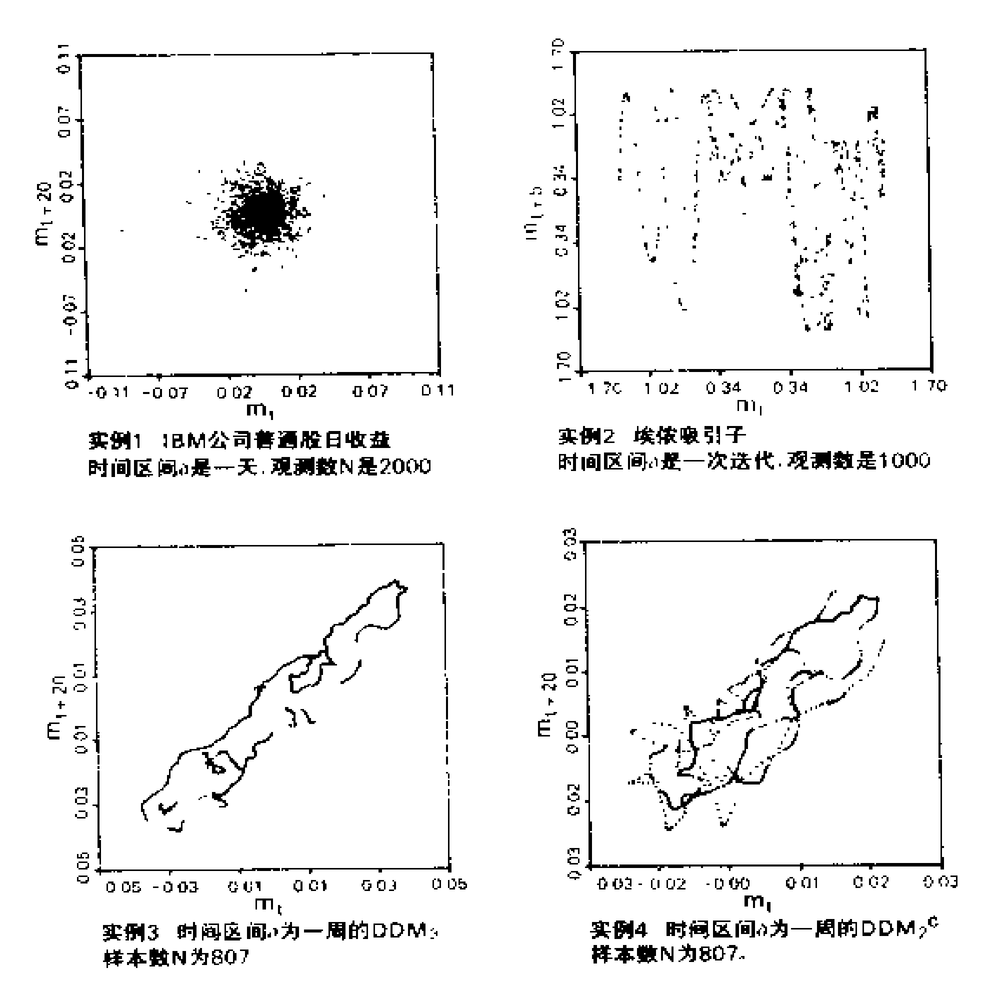
我们用对数线性消去趋势法消去长期趋势。因此，我们的数据由对时间的总量/对数值的普通最小平方法线性回归的残差组成。因为对数线性消去趋势法去掉了中性恒定增长率趋势，我们相信对于经济数据的混沌检测，对数线性消去趋势法是一种合适的形式。我们用如下的缩写代表消去长期趋势后的货币总量数据序列。在 $M1$, $M2$, $M3$ 和 L 水平上进行加总的迪维西货币需求总量分别用 $DDM1$, $DDM2$, $DDM3$ 和 DDL 表示。相应的迪维西货币供给总量分别用 $DSM1$, $DSM2$, $DSM3$ 和 DSL 表示。相应的官方联邦储备系统的简单求和货币总量分别用 $SSM1$, $SSM2$, $SSM3$ 和 SSL 表示。为了检查所用的消去趋势法的有效性，我们用对数立方修匀数据重新进行了所有测试。在这种情况下，我们的数据是由在时间的三阶多项式上对数据的对数值进行普

通最小平方法回归所得的残差组成。我们采用对总量符号附加上标 C 的方法表示对数立方修匀数据。例如，$DDM2^C$ 代表对数立方修匀的迪维西需求 $M2$。尽管我们并未发现对数立方消去趋势法有什么特别的理论价值，但它的确提供了一种方便的检验，来理论性地说明对数线性消去趋势法的吸引力和有效性。

成功发现混沌的情形是 $DDM2$, $DDM3$, DDL, $DSM2$, $SSM2$ 和 $DDM2^C$。这些数据序列通过了我们关于数学混沌和存在奇怪吸引子的所有检验。在所有其他情形中，未能找到有限的相关维数，因为对于任何低嵌入维数 n，在 $\log_2 C_n(\epsilon)$ 相对于 $\log_2 \epsilon$ 的图上不存在(2.6)式的线性区域。在那些不成功的情形中，我们的结论是：或者是数据受噪声污染太严重；或者是总量不能用很少量的工具进行控制，因为状态空间的最小维数也是极大的。下面我们详细地描述那些成功情形的结果。

8.6.1 相空间图

图 8.1 包括了在嵌入维数 $n=2$ 的四种实例中的相空间图。实例 1 和实例 2 为与实例 3 和实例 4 的比较提供了有效的参考样本。实例 1提供了 IBM 公司普通股股票日收益的 2000 个观测值的相图。近乎一致的云状点十分类似于纯粹高斯白噪声的相图。这些结果并不与普通股收益的有效市场理论相矛盾。实例 2 是一个已知奇怪吸引子(埃侬吸引子) 1000 个观测值的相图，其图形明显不同于一致的云状，比简单稳定系统或周期系统的图形要复杂得多。



实例1 IBM公司普通股日收益
时间区间δ是一天，观测数N是2000

实例2 埃侬吸引子
时间区间δ是一次迭代，观测数是1000

实例3 时间区间δ为一周的DDM_3
样本数N为807

实例4 时间区间δ为一周的$DDM_2{}^c$
样本数N为807

图 8.1 嵌入维数 n=2 时的相图

实例3和实例4分别是 $DDM3$ 和 $DDM2^c$ 的相图。$SSM2$ 的相图与 $DDM2^c$ 的非常类似，其他成功获得混沌的实例（$DDM2$, DDL 和 $DSM2$）的相图则与 $DDM3$ 的相图非常类似。因此，在这里我们只给出了 $DDM3$ 和 $DDM2^c$ 的相图。在每个实例中，延时都是20个星期，在展示相图时的延时选择上具有某种任意性。

在实例 3 和实例 4 中，我们看到它们的图形与白噪声时没有相似之处，也比简单稳定或周期系统的相图要复杂得多。图形的特征在于有许多折叠和扭曲。实例 4 比实例 3 的扭曲更多。尽管单单考察相图并不能得出结论性的推断，但图 1 展示的初步探索性数据分析提醒我们，这些成功的实例可能是混沌的，而且可能具有奇怪吸引子。与实例 2 和其他有名的理论混沌实例（如惠斯克映射和若斯勒模型）的比较表明，成功实例中的奇怪吸引子具有非常复杂的结构，它完全具有分形几何特征。实例 3 和实例 4 可能是若斯勒螺旋混沌的几何扭曲变形，但若斯勒混沌在实例 4 中的扭曲变形要大于在实例 3 中的扭曲变形。因此，我们对 *DDM*2, *DDM*3, *DDL* 和 *DSM*2 所展示的混沌形式，比对 *DDM*2^c 和 *SSM*2 展示的非常复杂的混沌形式更熟悉一些。

因为用相图并不容易区分混沌和多重周期轨道，进一步检验就是必须的。

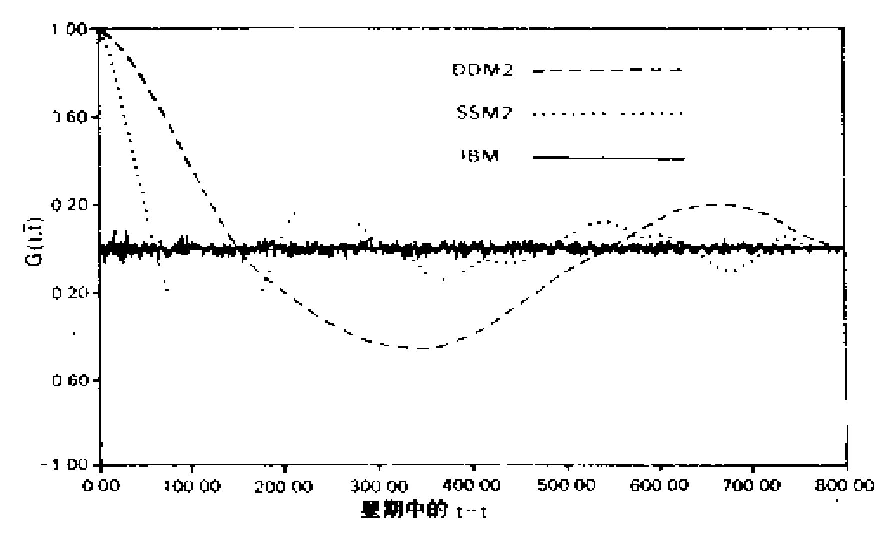


图 8.2　相对于 $\bar{t}-t$ 的自相关函数 $G(t,\bar{t})$

（样本容量是 807 个星期）

8.6.2 自相关函数图

我们在图 8.2 中展示了当 $T-t$ 从 0 到 800 变化时，自相关函数 $G(t, T)$ 的曲线。我们展示的曲线是对数线性消去趋势后的货币总量 $DDM2$ 和 $SSM2$。与相图一样，$DDM2^c$ 的图形非常类似于 $SSM2$ 的图形，而其他成功的实例($DDM3$, DDL 和 $DSM2$)则都与 $DDM2$ 的自相关图形非常类似。因此，我们在图 2 中只给出了 $DDM2$ 和 $SSM2$ 的结果。

为了比较，我们也给出了 IBM 公司普通股日收益的自相关函数图。这一参考实例产生的自相关函数与纯粹白噪声的德尔塔(δ)函数(在原点处有一尖峰)非常类似。其他图形都先产生指数衰减，然后是粗尾巴，并明显地以渐近方式收敛于时间轴。这是混沌的典型特征。每个实例的不相关特征时间 T_{AC} 经过计算，列在表 3 的最后一栏。没有自相关函数的图形与余弦振荡函数类似，而余弦振荡函数是周期过程的产物。从图 8.2 和不相关特征时间可以看出，$SSM2$($DDM2^c$ 也一样)自相关函数的初始指数衰减很快，当然它没有 δ 函数以无穷大的速度衰减来得快。

8.6.3 相关维数

奇怪吸引子的相关维数拥有极多信息。在我们的成功实例中计算相关维数的第一步展示于图 8.3 中。在该图中，对于嵌入维数 $n=1, \cdots, 6$，我们给出 $\log_2 C_n(\epsilon)$ 相对于 $\log_2 \epsilon$ 的图形。我们使用了 5 个星期的延时 τ，从物理学文献的经验和我们对货币总量数据进行的反复测试中得出，5 星期延

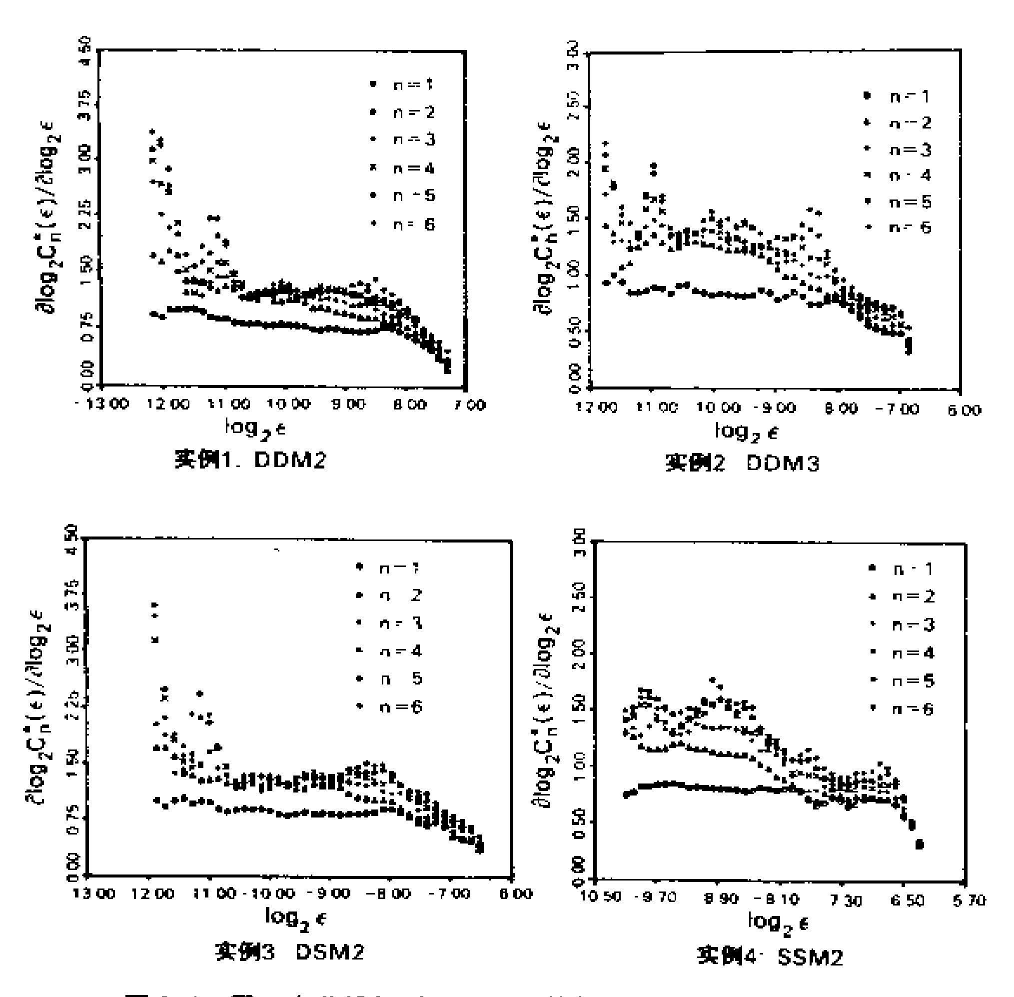


图 8.4　图 3 中曲线相对于 $\log_2 \epsilon$ 的斜率图，嵌入维数 $n=1, 2, \cdots, 6$。图 3 中的曲线线性区域可以从图 4 的平坦区域中判明。

选对象之外。

为了使我们判定斜率平台，图 8.3 中每条曲线相对于 $\log_2 \epsilon$ 的斜率展示在图 8.4 中。通过对图 8.4 的考察，对于每一个嵌入维数 n，我们找出了斜率平台的左边界 $\log_2 \epsilon_L(n)$ 和右边界 $\log_2 \epsilon_R(n)$。对于 $n=3, 4, 5, 6$ 我们在表 8.1 中列出了这些边界。在 $DDM2$，$DSM2$ 和 $DDM3$ 的情形中，

平台非常稳定，$DDM2$ 和 $DSM2$ 所产生平台的稳定性和宽度可以与对最高质量实验数据的预期结果相媲美。在图 8.3 和图8.4中我们没有给出 DDL 和 $DDM2^c$，因为 DDL 的图形非常类似于 $DDM3$，而 $DDM2^c$ 的图形非常类似于 $SSM2$。

表 8.1　图 8.3 中线性区域的左右边界

总　量	$\log_2 \epsilon_L(3)$	$\log_2 \epsilon_R(3)$	$\log_2 \epsilon_L(4)$	$\log_2 \epsilon_R(4)$
$DDM\ 2$	−11.48	− 9.13	−11.48	− 9.00
$DDM\ 3$	−11.59	− 9.22	−11.19	− 9.36
DDL	−11.53	−10.06	−11.42	−10.27
$DSM\ 2$	−11.00	− 8.69	−10.42	− 8.54
$SSM\ 2$	− 9.99	− 8.46	− 9.69	− 8.56
$DDM\ 2^c$	−10.23	− 8.58	− 9.96	− 8.67

总量	$\log_2 \epsilon_L(5)$	$\log_2 \epsilon_R(5)$	$\log_2 \epsilon_L(6)$	$\log_2 \epsilon_R(6)$
$DDM\ 2$	−11.48	− 9.13	−11.48	− 9.13
$DDM\ 3$	−10.67	− 9.49	−10.67	− 9.62
DDL	−11.53	−10.37	−11.53	−10.48
$DSM\ 2$	−10.42	− 8.83	−10.57	− 8.54
$SSM\ 2$	− 9.58	− 8.46	− 9.48	− 8.36
$DDM\ 2^c$	− 9.59	− 8.76	− 9.59	− 8.86

利用图 8.3 中在 $\log_2 \epsilon_L(n)$ 和 $\log_2 \epsilon_R(n)$ 之间的点，对于每个 n，我们用 $\log_2 \epsilon$ 对 $\log_2 C_n(\epsilon)$ 作了线性回归。在表 8.2 中给出了 $n=3,\cdots,6$ 时 $D(n)$ 的估计值，即斜率。通过考察这些数值，我们得到了 $n\to\infty$ 时 $D(n)$ 的极限之估计。其结果便是奇怪吸引子的相关维数 D 的估计值。这些 D 的估计值列在表 8.2 中的最后一栏。随 $n\to\infty$ 外推，相空间中的样本容量下降，因此随着嵌入维数的增加，图 8.4 中的平坦区

域越来越小。从而使得 n 增加时，$D(n)$ 估计值的精度下降；而且 $n=6$ 时，样本容量就已经相当小了。对于 *SSM*2，我们决定取 $D=1.5$ 而不是 1.6，正反映了我们对 $D(6)$ 估计的低精度的判断。

表 8.2　对 n 维相空间($n=3, \cdots, 6$)中相关维数 $D(n)$ 的计算和奇怪吸引子相关维数 D 的估计

总量	观测数(星期)	$D(3)$	$D(4)$	$D(5)$	$D(6)$	D(饱和估计)
*DDM*2	807	1.34 (0.01)	1.36 (0.01)	1.40 (0.03)	1.42 (0.04)	1.4
*DDM*3	807	1.43 (0.004)	1.45 (0.01)	1.44 (0.01)	1.47 (0.02)	1.5
DDL	798	1.36 (0.01)	1.44 (0.02)	1.48 (0.02)	1.54 (0.03)	1.5
*DSM*2	798	1.28 (0.01)	1.30 (0.01)	1.27 (0.01)	1.27 (0.01)	1.3
*SSM*2	807	1.32 (0.002)	1.44 (0.01)	1.50 (0.01)	1.57 (0.01)	1.5
*DDM*2ᶜ	807	1.19 (0.01)	1.27 (0.01)	1.28 (0.02)	1.19 (0.01)	1.3

注：D 是在饱和嵌入维数上达到的。对于嵌入维数 $n=3, \cdots, 6$，相关维数 $D(n)$ 是图 8.3 相应图形中的线性区域的估计斜率，该线性区域的左、右边界列于表 8.1。
括号中的数据是普通最小平方法的斜率估计量的标准误差。

由于吸引子是分形(奇怪吸引子)，其相关维数全是分数。在每个实例中，相关维数估计值在 1.3 到 1.5 之间。所以在我们成功的实例中，离散时间模型的最小状态空间维数是 2。从图 8.4 中，可用本—米兹拉奇、普罗卡恰和格拉斯博格(1984)描述的方法估计数据中一致白噪声的数量。我们发现在 *DDM*2 和 *DDM*3 中存在 1%的噪声，在 *DDL*，*DSM*2，

$SSM2$ 和 $DDM2'$ 中存在 2%的噪声。

我们知道，尽管 m_t 是状态向量的函数，但 m_t 不是状态向量 s_t 的一个元素。因此，状态空间不包括观测变量 m_t 的路径。所以，在我们成功的实例中，能够包含增广向量(m_t, s_t)路径的最小空间维数是 3。如果将我们的结果归因于连续时间世界，惯常做法是把增广向量(m_t, s_t)用作状态向量，因为描述系统在连续时间中演化的微分方程系统包含变量的增广向量。从而，如果将我们的计算结果归因于连续时间，在我们成功的实例中最小状态空间维数是 3。

尽管当 $n=5$ 时 $D(n)$ 的值并没有完全收敛，但可以合理地认为 $D(5)$ 的值接近于饱和值。而且，当 $n=6$ 时，在相空间中观测 n-轨道，我们会发现合乎我们目的的样本容量变得非常小了。因此，在下一节我们计算李雅普诺夫指数时选择 $n=5$ 作为饱和嵌入维数。为了同样具有说服力，我们选择 $\tau=5$ 进行计算。

8.6.4. 最大李雅普诺夫指数

图 8.5 包含了最大李雅普诺夫指数 $\overline{\lambda}(t)$ 在演化时间 t 上的图形。最大李雅普诺夫指数的数值以 15 个星期为时间间隔进行计算。我们发现这种间隔在确定每一图形的平台时较为合适。我们给出了经过对数线性消去趋势后的成功实例的图形，如 $DDM2$, $DDM3$, DDL, $DSM2$ 和 $SSM2$。

通过考察图 8.5，我们对图中所示每个实例确定了平台的演化起始时间 t_S 和演化结束时间 t_E。我们将这些边界时间列表，同时给出相应的最大李雅普诺夫指数 $\overline{\lambda}(t_S)$ 和 $\overline{\lambda}(t_E)$ 的值。我们对 t_S 和 t_E 之间的 t 计算了 $\overline{\lambda}(t)$ 的平均值，记为 $\overline{\lambda}^*$

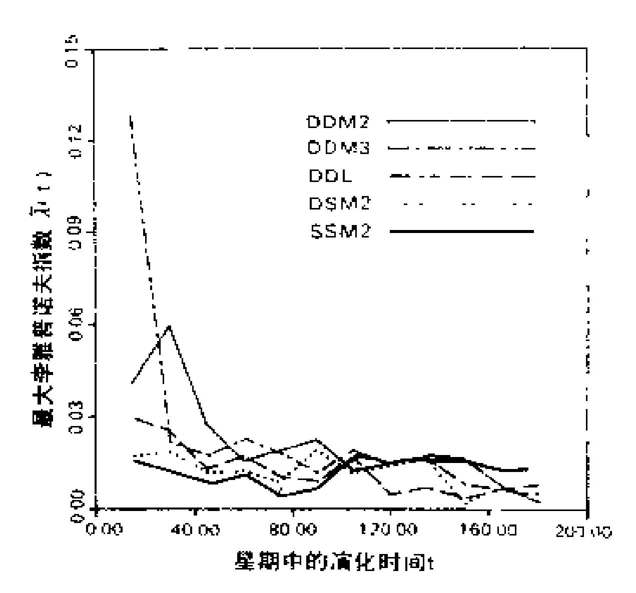


图 8.5 最大李雅普诺夫指数随时间变化的图形，演化时间从 15 星期到 180 星期，间隔为 15 星期。

放在表8.3中。这些平均值非常有意义，因为它们估计了在吸引子集合中的最大李雅普诺夫指数。在每种情况中，如果是

表 8.3 对相空间中最大李雅普诺夫指数的计算

总量	观测数（星期）	t_S	$\lambda(t_S)$	t_E	$\lambda(t_E)$	λ^*	λ^{*-1}	T_{AC}
DDM2	807	45	0.0275	150	0.0165	0.0184	54.3	99
DDM3	807	30	0.0220	135	0.0170	0.0180	55.6	91
DDL	798	45	0.0129	180	0.0120	0.0122	82.0	94
DSM2	798	45	0.0126	135	0.0164	0.0136	73.5	100
SSM2	807	45	0.0133	105	0.0169	0.0135	74.1	41
DDM2'	807	45	0.0205	165	0.0148	0.0140	71.4	49

注：延时 $\tau=5$ 星期，嵌入维数 $n=5$，所算各李氏指数间的时间间隔为 15 星期，t_S＝图 8.5 中 $\lambda(t)$ 稳定区域的起始时间；t_E＝图 8.5 中 $\lambda(t)$ 稳定区域的结束时间；$\lambda(t)=t$ 时最大的李雅普诺夫指数值；λ^*＝t_S 到 t_E 之间的平均值；T_{AC}＝自相关函数的特征不相关时间。

总和数据误差；(2)或者是高质量的总量，但不能为小数目的控制变量所控制，以至于状态空间的维数必须非常大。

这些结果与有关的加总理论是一致的。$M1$ 是最低水平的加总，没有什么替代效应被加总内在化，因此，对于 $DDM1$，$DSM1$ 或 $SSM1$ 的许多解释变量都应该包括在需求函数和供给函数之中。我们可以预期，这些总量将很活跃，如果没有很多政策工具，则很难加以控制。换句话说，状态空间的最低维数必然很大。

迪维西需求总量比简单求和总量运转得好这一事实恰恰可以从加总理论中预料到。简单求和指数甚至不是精确加总理论总量的一阶近似，这种零阶近似会产生非常大的加总误差。我们应该料想到，在简单求和货币总量中会发现较高的噪声。例外情况是简单求和的 $M2$ 总量。我们并不知道结果对 $SSM2$ 有利的原因；不过，我们已经发现 $M2$ 是在其他检验中与迪维西货币总量相比运转得不错的唯一的简单求和货币总量。特别是相对信息理论标准进行判断时，简单求和 $SSM2$ 被发现是失业率的一个好指标。参见巴尼特(1982 b)的文章。

DDL 比 $DDM2$ 和 $DDM3$ 具有更多噪声的可能原因在于：数据的质量在加总由 $M3$ 水平向更高水平 L 过渡时不如在 $M3$ 加总水平上的数据质量。实际上，在 L 加总水平上数据的可得性问题已导致联邦储备系统在计算 L 时比计算其他货币总量需要更长的时间延迟。类似地，用于供给方迪维西货币总量的数据质量不如用于计算需求方迪维西货币总量的数据质量高，因为从理论上讲，计算供给方迪维西货币总量所需的使用者成本公式包含大量交易成本，而这方面的数

据不存在。另外，迪维西货币需求总量直接测量经济中的货币服务流量。但是，(由存在的不支付利息的准备金导致的)管制中间物插在供给和需求的迪维西货币总量之间，使迪维西货币供给总量与经济中的货币服务流量产生距离。

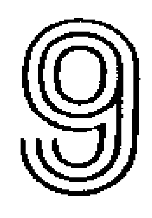
并无特别理由相信趋势消去法的有效性应当很高，我们的结论也不这么认为。不过，对数线性趋势消去法被经济理论证明是合理的，因为它消去了中性的固定增长率趋势。我们认为 *DDM*2 和 *DDM*3 是高质量的总量，可能比任何其他货币总量更易于控制。例如，假如最小状态维数 2 是实际状态维数，只需要两种工具就可以完全控制总量。如果只有一个状态变量是可控制的政策工具，那么只需要用它去抵消另一个未受控制变量对货币总量的影响。事实上，我们当然应该料到实际状态维数远远高于 2，因为相关维数产生的下界是很保守的。

我们的另一个结论是，数学混沌和奇怪吸引子的文献在使用高质量和仔细加总的数据基础上是可以用于经济学的，例如 *DDM*2 和 *DDM*3 等数据。避免诱致由于加总误差在数据中带来的过度噪声的有关加总理论应该得到使用。

万中心

译自《动态经济计量建模》，

剑桥大学出版社 1988 年出版



非线性动态与GNP数据

乔斯·A·沙因克曼　布莱克·勒巴龙

9.1 引言

最近，在理论家中间，对增长和波动的非线性模型的兴趣又有所恢复。与古德温(1951)、希克斯(1950)及其他人所做的早期工作相比，现在的这种新模型明确地纳入了追求最大化的经济活动主体、竞争行为及理性预期。迄今为止，该模型的最新形式是由博尔德林和蒙特鲁奇奥(1986)完成的。他们指出：对于映射一个紧集于其自身的任何二阶连续可微函数$f()$，存在着这样一个新古典增长模型，即对于其解而言，该模型具有一个满足方程$k_{t+1}=f(k_t)$的资本存量序列k_t。由于这样一种新古典增长模型准确地给出了与一个带有完全预见(perfect foresight)的动态竞争均衡模型相同的解，因此，博尔德林—蒙特鲁奇奥定理能被用来确立这样一种理论上的可能性，即一个相当简单的决定论的组织体系也能引起一个仿佛是由任意的决定论动态导致的时间路径。

这些及其他一些例子(比如格朗蒙特1985年提出的例

子)似乎将波动的非线性决定论模型置于与受到外生振荡冲击的稳定系统相同的理论基础之上,它构成了线性(实际上是对数线性的)宏观经济计量模型的基础。然而,从经验角度看,情况是大不相同的。即使允许测量误差存在,一个低阶的决定论系统似乎也不可能说明所观测的经济数据。另一方面,这两种类型的模型都是一个模型的特例,即

$$z_{t+1}=f(z_t,\varepsilon_t)$$

其中,对于每一个 t, z_t 是"状态变量"的一个向量,而 ε_t 是一个随机变量。因而,人们自然要对 f 是否非线性地依赖于 Z_t 提出疑问。

极适于总量数据的低阶自回归模型似乎对非线性在实际经济时间序列中是重要的这种观点提出了挑战。在下面例子的帮助下,我们可回答上述问题:

$$z_t=au_{t-1}\cdot z_{t-1}+u_t$$

其中 u_t 具有零均值,且是独立和同一分布的(independent and identically distributed——记作 i.i.d.),它能连续地引发不相关的结果。进而言之,现在有一系列决定论的例子显示出:简单非线性映象能产生看起来——从线性时间序列分析的角度——好像是由 i.i.d. 抽样产生的结果。在这些例子的激发下,塔肯斯(1983)、格拉斯博格和普罗卡恰(1983)提出了一套规则系统来区分这些可能性。这些规则系统在区分由理论模型产生的确定性数据和"随机"数据上是极其成功的,而且能够包容一个非线性决定论系统与少量噪声相结合的现象(Ben-Mizrachi et al. 1984)。巴尼特和陈平(1988)、布罗克(1986)、布罗克和塞耶斯(1986)、弗兰克和斯滕格斯(1986, 1987)、沙因克曼(1985)、沙因克曼和勒巴龙(1986)分别将这

些方法应用于经济数据。虽然现有的这些非线性特征是在某些序列中发现的(如巴尼特的迪维西货币总量、美国的就业、投资、黄金与白银的收益、股票收益等),但布罗克和塞耶斯(1986)指出,人们不能否认这样一种假设:消除长期趋势的美国(1947—1985年)季度实际GNP是通过运用相关维数的格拉斯博格—普罗卡恰--塔肯斯(简写为GPT)测度,从一个两年滞后的自回归过程[记为AR(2)]中得到的。

如果可以得到一个无限数据集合,且在实际上运作得很好的话,GPT估计可以确定AR(2)的残差是否真实,但直到最近也没有一种渐近分布理论(asymptotic distribution theory)是适用的。这个缺陷由布罗克、德克特、沙因克曼(简称BDS)(1986)三人弥补了。他们依据GPT维数估计提出了一种统计分布理论。首先,我们在此应用根据人均年度GNP数列(1872—1986年)的BDS统计量来检验非线性的存在。我们的目的与其说是要证实在这一时间序列中这种非线性的存在,倒不如说是要探讨在试图应用BDS检验中所出现的各种问题。我们证明:对于这个序列,BDS检验能用来否定主要的线性模型。这一结论虽然很鼓舞人心,但并非是确定的。在第二部分中所提出的例子的帮助下,我们将解释为什么这种否定在理论上可能是由一个非固定方差造成的。我们力图用加权最小平方法来说明这个问题,加权最小平方法回归的残差再一次显示出它不能通过BDS检验。我们也讨论了引人虚拟变量的可能性,这种变量似乎能说明许多的非线性。其次,我们将该检验应用于经过季节调整后的美国工业生产增长率的月序列之中,并发现了更加有力的非线性证据。在阿什利和帕特森(1986)所做的双光谱检验(参

见 Hinich 1982)的帮助下，已经发现同样的序列会展示出非线性。

经济学家们有充分的实际理由检测出宏观数据中的非线性，他们一直很清楚估计参数和评估政策干预的技术的重要性。博尔德林和蒙特鲁奇奥的结论表明，人们能够在一个非线性决定论的模型中导出一个政策函数，从线性观点看，它确实好像是从一个对数线性随机增长模型中导出的。下面的例子(它是一个逻辑斯谛方程的变化形式)将说明这一点。

令：

$$f(x)=x^{\{a(1-\ln x)+b[(\ln x)^2-1]\}}$$

当 $\ln x=\lambda$ 且等于自然对数的底 e 时，可得到选出的 a 和 b ——它们使对于 $x\in[1, e]$ 的 $f(x)$ 最大化。对于 $\lambda=0.5$，我们得到 $a=4$，$b=0$，进而我们得到了自然对数的"逻辑斯谛混沌"(logistic chaos)；对于 $\lambda=0.56$，由运用 $k_{t+1}=f(k_t)$ 而产生的数据在 1000 个样本中，除一开始的滞后以外，(在对数中)未展示出任何明显的相关。因为 f 映射 $(1, e)$ 于其自身且是 C^2 的，所以博尔德林—蒙特鲁奇奥定理的条件被满足。进而我们得到一个 k_t 对 k_{t+1} 的回归方程：

$$k_{t+1}=0.467+(0.088)k_t+U_t \qquad (*)$$

当然，这是与具有对数效用函数和由 $x_{t+1}=u_t(x_t-c_t)^{0.088}$ (其中 u_t 是 i.i.d.)给出的动态的单一经济活动主体的模型相一致的。虽然(＊)式甚至未能接近拟合于我们所掌握的任何实际数据，但它说明了在从决定论模型中导出呈对数线性状数据这一过程中博尔德林—蒙特鲁奇奥结论的用途。

应当注意，为使这一信息有用，就有必要估计现有的非线性。我们认为，在相关函数和 BDS 检验背后的观点能被用

$$\Sigma_{22}=4(K^{m}-C^{2m})+8\sum_{j=1}^{m-1}(K^{m-j}C^{2j}-C^{2m}),$$

$$\Sigma_{12}=2(K+K^{m}+2KC^{m-1}-(C+C^{m})^{2})$$

$$+4\sum_{j=1}^{m-1}(KC^{m-1}+K^{m-j}C^{2j}-C^{1+m}+C^{2m})$$

$$-\frac{1}{2}(\Sigma_{11}+\Sigma_{22})$$

$$\Sigma_{21}=\Sigma_{12}$$

进而，在计算 σ 中，我们能用 $C(1, n, \epsilon)$ 置换 C，用 $K(1, n, \epsilon)$ 置换 K。

应强调的是，BDS 统计量基于这样一种思想，即对于 i.i.d. 系统，向量 $(X_i, X_{i+1}, \cdots X_{i+m-1})$ 对最大模 (L^{∞}) 在 $(X_j, X_{j+1}, \cdots, X_{j+m-1})$ 的 ϵ 内的概率恰好是 X_i 在 X_j 的 ϵ 内的概率的 m 次幂。

除BDS 统计量之外，我们也给出图示 9.1、9.3-5。在这些图中，对于一个固定的 m 和 ϵ，我们标绘若干数偶(pairs) (t, τ) 使：

$$d[(X_t, X_{t+1}, \cdots, X_{t+m-1}), (X_\tau, X_{\tau+1}, \cdots, X_{\tau+m-1})]<\varepsilon$$

这种图被称为递归图，它是由埃克曼、坎普赫斯特、茹厄勒(1987)引入的。它能检验邻域是否大部分处于该序列的一个特殊子集内或是均匀地扩散。缺乏同质性从原则上讲，暗示着该序列的每一部分实际上是由一个不同的系统导出的，并且对于零状态(null)的拒绝可能是这种情况的一个结果。下面的例子说明了我们的观点。

例 1：假设具有 $2N$ 个点的一个数据集的第一个 N 个点

其中 ϵ 等于整个序列标准差的1/2。图9.1显示出该例子的递归图。注意，大多数数偶处于图右上角。

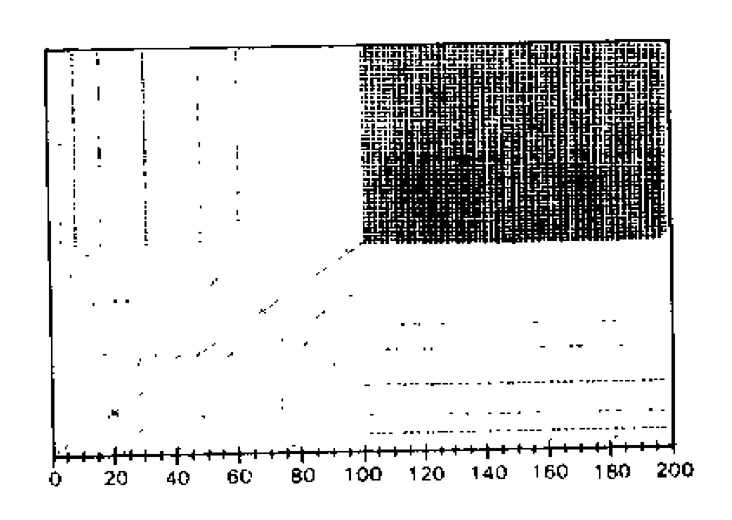


图9.1 一致随机[−1/2,1/2]和[−1/32,1/32]；$d=2$，$\epsilon=\frac{1}{2}$标准差

从原理上讲，通过对数据集的前一半和后一半的残差方差分别进行估计和重正化(renormalizing)各部分以使其方差相等，人们就能够解决这个问题。但这并非十全十美，因为这种做法意味着原来的线性模型规定是不恰当的。更佳的方法是承认残差的方差在这两个时期间发生了变化，并运用广义最小平方法。对于我们使用的线性模型，美国1947年以后的GNP数据的残差展示出一个相当低的方差。

9.3 数据和检验

9.3.1 1870—1986年的GNP

在检验GNP残差的白噪声中有两点十分关键：第一，残差是从一个回归模型中计算出的，因而不是i.i.d.；第二，其他

所研究的序列与BDS 论文中所研究的相比是相当短的。虽然类似于定理 1 的结果似乎对于线性模型的残差是成立的，但我们对该问题将采取更直接的方针。我们从拟合一个线性模型于原始数据出发，然后讨论其他可供考虑的线性模型。对于每一个线性模型，我们以下列方式（这个过程与 Efron 1982 的第 5 章紧密相关）导出比较集：

①将残差从初始拟合的模型中抽出，称为$\{e_t\}_{t=k}^{N}$（k 依赖于所拟合模型的滞后长度）。

②从这个已被置换了的数据集中再抽样，产生残差 e^*_t 的一个"杂乱的"新样本。

③运用初始模型和估计参数，再生出一个使用杂乱的新残差序列的线性模型。

④在这个生成序列上再次估计该线性模型，给出一个新的残差序列 $\hat{e}_t$。

⑤从这个残差序列 $\hat{e}_t$ 中得到BDS 统计量。

然后，我们将数据中的检验统计量与 250 个比较数据集合中的检验统计量的分布进行比较，并归纳出这个比较数据集的百分比——它至少赋予与这种检验统计量同样大的数值。

我们面临的下一个问题是选择一个线性模型。数据包含着已知的线性特征和趋势。我们打算把这些数据拟合"最佳的"线性模型并进而考察残差。就 GNP 数据而言，存在着一些关于什么是最佳模型的争论，主要问题是这些数据是否是差分静态的（difference stationary）

$$(1-L)y_t=\mu+A(L)e_t,\ e_t \text{ i.i.d.}$$

或趋势静态的（trend stationary）。

$$y_t = b_t + A(L)e_t$$

科克伦(1986)运用观测方差差分(variance differences) $K^{-1}\mathrm{var}(y_t - y_{t-k})$ 的方法，估计了在实际人均 GNP 中随机游走成分的大小。这个检验是基于这样一个事实，即在随机游走中，恰巧被显示出的方差一定与 t 成比例增加。他发现，随机游走成分的方差对一阶差分的比率大约是 2/5。这意味着在年度 GNP 增长中存在着一个回复成分(reverting component)的较大均值。科克伦接着通过模拟一些线性模型找出了对其人均 GNP 结果的最佳拟合。他发现，带有趋势

$$(1 - L - L^2)y_t = b_t + e_t$$

的一个 AR(2) 最佳地复制了数据的方差差分。在本文的大部分论述中，我们将运用该模型的变体。然而，由于认识到这种争论仍未停止，我们也将观测已差分序列的结果。

这里所使用的数据是美国 1870—1986 年取自然对数的实际人均 GNP 值，1947 年以前年份的数据来源于弗里德曼和施瓦茨(1982)的文章，战后数据则来源于《总统经济报告，1986》。

首先，我们检验具有趋势残差的 AR(2)

回归(R^2=0.99)

		标准差
常数	−1.31	(0.31)
滞后 1	1.09	(0.09)
滞后 2	−0.30	(0.09)
趋势	0.0036	(0.00089)

BDS $\left(\varepsilon = \frac{1}{2}\text{标准差}\right)$

2 维	5.77	(0.00)
3 维	7.11	(0.00)

对于这个回归，括号中的数值是从普通最小平方法（记作OLS）中得到的标准误差。对于 BDS 统计量，括号中的数值是 250 次模拟运算的比例，这种模拟是针对具有处于 $[-C_s, C_s]$——其中 C_s 是初始数据的统计值——之外的 BDS 统计量的适当模型进行的。BDS 统计量明显地拒绝了一个 AR(2)［诸如此处所使用的具有 i.i.d. 残差的 AR(2)］能导出初始数据的观点。图 9.2 绘出了这个残差序列，图 9.3 是先前所讨论的递归图。在图 9.2 中可直接看到方差的减小；图 9.3 显示出：大量的相邻数偶聚集于图的右上角，它对应于战后时期。虽然这并不意味着方差的变化导致了显著的 C，但它的确表明方差的变化可能是一个主要因素。

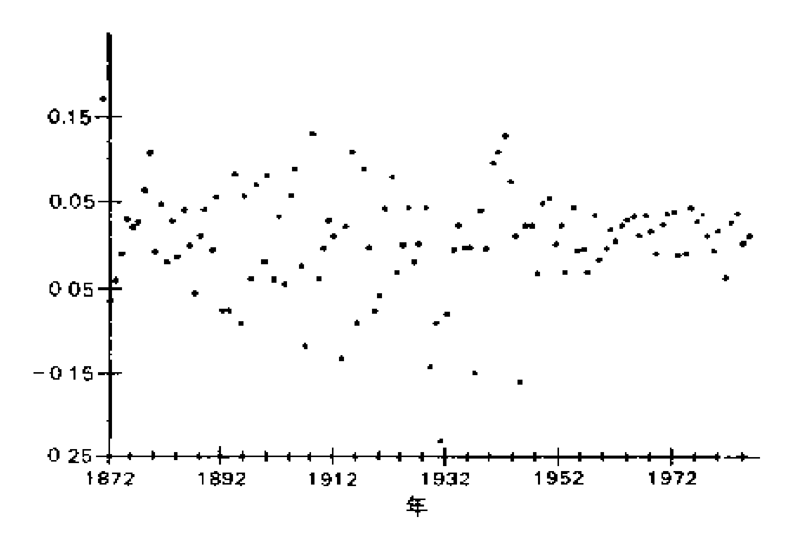


图 9.2　具有 AR(2) 趋势残差的人均 GNP

为了考察这些结果是否依赖于现有的稳定性是何种类型，我们取 log 人均 GNP 的一阶差分。通过运用偏自相关

函数(简写为 PACF),我们可以确定一个 10 年滞后的自回归[AR(10)],并且在回归估计之后,其残差呈现为白噪声。(它们的自相关是在 95%的零置信区域内。)然后,在运用 BDS 统计量时,残差的检验方法同以前一样。

回归 (R^2=0.22)

		标准差
常数	0.02	(0.008)
滞后 1	0.20	(0.092)
滞后 2	−0.01	(0.091)
滞后 3	−0.08	(0.091)
滞后 4	−0.20	(0.091)
滞后 5	−0.24	(0.091)
滞后 6	0.17	(0.091)
滞后 7	−0.04	(0.091)
滞后 8	−0.05	(0.091)
滞后 9	−0.22	(0.087)
滞后10	−0.01	(0.087)

BDS ($\epsilon = \frac{1}{2}$标准差)

2 维	2.68	(0.08)
3 维	3.13	(0.07)

图 9.4 是该序列的递归图。结果和图示没有变化。这个序列包含着与残差的第一个集合相同的战后数据分布。

正如我们以前提及的,在一个纯随机系统中,方差的变化能导致 BDS 统计量拒绝零假设。我们的数据在战后期间的确有较低的方差,并且递归图显示出存在着大量接近的数偶。

我们将通过拟合一个单一的线性关系[具有趋势的 AR(2)],

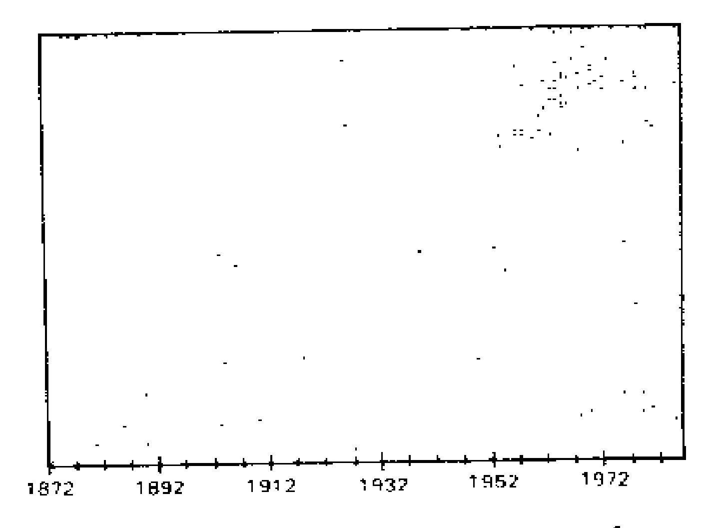


图 9.3　人均 GNP 的 AR(2) 趋势残差; $d=2$, $\epsilon=\frac{1}{2}$标准差

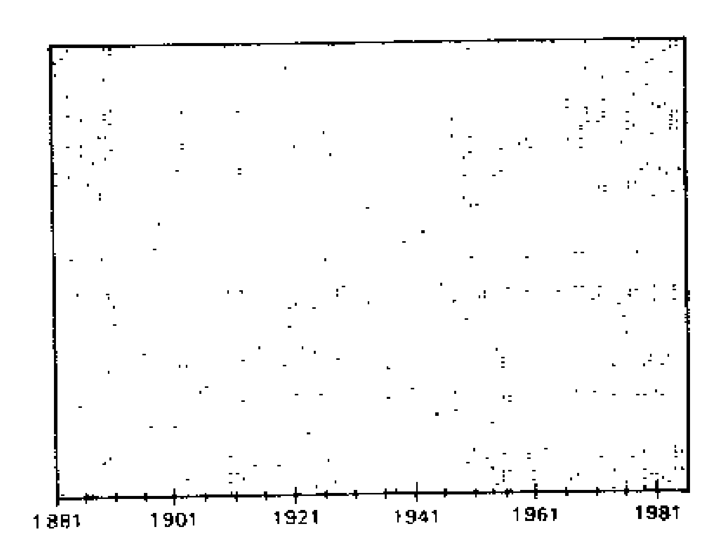


图 9.4　人均 GNP 差分的 AR(10) 残差; $d=2$, $\epsilon=\frac{1}{2}$标准差

但允许残差在 1947 年之前和之后具有不同的方差,来试图说明这种现象的原因。为了估计这个方差,我们使用了广义最小平方法(GLS)。这种简单的情况——其中残差仍是非相

关的——也被称作加权最小平方法(WLS)。我们通过在初始数据上运算具有趋势的 AR(2),估计出残差的方差,然后分别将残差分离并估计方差。这些被用于运算数据的最终 GLS 估计和导出 BDS 统计量的调整后的残差。泰尔(1971)描述了这个两步骤程序。

GLS 结果

子时期标准差

1872—1946 年:$\sigma=0.073$

1947—1986 年:$\sigma=0.024$

回归(GLS)($R^2=0.99$)

		标准差
常数	−1.38	(0.32)
滞后 1	1.04	(0.08)
滞后 2	−0.27	(0.07)
趋势	0.0039	(0.00092)

BDS $\left(\epsilon=\frac{1}{2}\text{标准差}\right)$

2 维	3.14	(0.044)
3 维	3.28	(0.068)

注意,图 9.5 中相邻的数偶在战后期间不再呈现为"簇集状",因为方差的调整已部分地消除了这一问题。它减少了 BDS 统计量,但它们仍处于模拟图的尾状线之中。[注意:模拟准确地复制了模型估计所使用的程序。运用乘以一个子时期的恰当尺度因子(scale factor)的杂乱的正态化残差,可以导出该序列。]

在下列检验中,我们继续进行在上一个检验中所做的工

作，但有一点除外，即对于其所有回归运算，虚拟变量被附加于时期1930—1939年和1940—1945年中。虚拟变量的添加

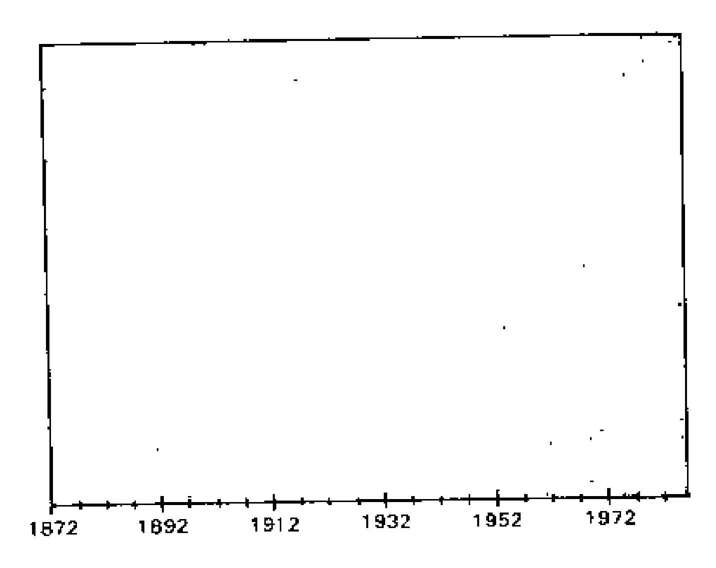


图9.5 人均GNP的WLSAR(2)，趋势，残差；$d=2$，$\varepsilon=\frac{1}{2}$标准差

降低了BDS统计量的显著性。这些结果表明：为说明这些异常时期，将在数据中消除可探测的非线性特征。

子时期标准差

1872—1946年，$\sigma=0.063$

1947—1986年，$\sigma=0.024$

回归（$R^2=0.99$）

		标准差
常数	−2.54	(0.36)
滞后 1	0.87	(0.08)
滞后 2	−0.28	(0.06)
趋势	0.0072	(0.0010)
1930—1939年	−0.13	(0.03)
1940—1945年	0.04	(0.02)

BDS$\left(\epsilon=\frac{1}{2}\text{标准差}\right)$

2维	1.83	(0.23)
3维	2.52	(0.16)

9.3.2 美国工业生产的月增长率

此处我们考察经过季节性调整后的美国工业生产月增长率的序列(1947.2——1987.2)。该序列包含450多个点。这种大量的观察点对BDS统计量的行为来说是重要的。另一方面,存在着这样一种可能性,即季节调整事实上引起了一些所观测到的非线性特征。我们在月份增长率上鉴别出(再次运用PACF)一个AR(24),并且对它进行了估计,结果发现其残差是"白噪声"。

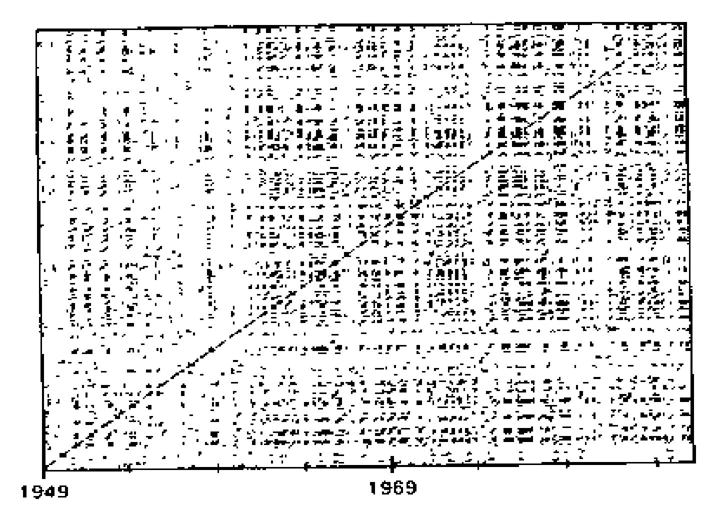


图9.6 工业生产的AR(10)残差: $d=2$, $\epsilon=\frac{1}{2}$标准差

BDS$\left(\epsilon=\frac{1}{2}\text{标准差}\right)$

2维	4.68	(0.00)

3 维	6.02	(0.00)
4 维	7.50	(0.00)
5 维	8.21	(0.00)

递归图(图 9.6)似乎没有显示出任何出现于 GNP 序列中的簇集的数偶。

9.4 结论

我们运用了由 BDS 提出的方法来检验美国实际人均 GNP 的时间序列中非线性的存在。结果是复杂的:检验否定了 AR(2)趋势模型,但这种否定中的一部分可能源于贯穿整个期间内的方差变动。虽然,只要我们在 1872—1946 年和 1947—1986 年期间允许不同方差的存在,检验就会仍然否定该模型,但是,在虚拟变量被引入到大萧条(1930—1939 年)和第二次世界大战(1940—1945 年)之后,它就不能否定该模型。结论的最后一点或许应该进一步探讨:虚拟变量的引入破坏了贯穿于不同时期的各种模式的某些相似性,例如它使一个包括 1940—1945 年在内的、以前类似于 18 世纪末的一段时间的时期现在变得不同了。这些结果对于工业生产的更长数据序列来说,肯定是更令人鼓舞的,它或许表明了处理短序列时 BDS 检验的局限性。虽然我们所关注的问题有些方法论的味道,但是其结果必然支持了宏观经济数据中非线性的其他证据。布罗克和塞耶斯(1986)对此做出了有益的讨论,并提出了原始证据。

人们应用 BDS 检验的困难之一是需要首先将之纳人一个特殊的线性结构内。虽然此处所考虑的结构的残差看起来

人们既可以预测在一个特定经济制度内发生的重大变化，如一个期货市场的出现、新金融工具的发展、税收政策的改变等所产生的影响；也可以预测经济系统对产业组织发生的重大变化，如石油输出国组织的创立的反应；但这些预测都不满足预测有用性的合理要求。尽管我们拥有精密的经济计量学工具和高超的建模方法，但我们的预测所提供给人们的信息很少能超过受"第一原理"所指导的直觉，甚至从定性分析角度看是正确的时也是如此。

更令人烦恼的是，许多经济变量很容易因诸如取对数一阶差分这样的简单做法而转化为"不相关的噪声"。另一种近乎灾难性的结果是，对数一阶差分可能会产生一种简单的低阶自回归(AR)模型或移动平均(MA)模型，但除了得到时间变化方差的某些证据外，好像不具有更进一步的结构。

这一结果很清楚地显示了：上述两种情况中包含的仅是经济时间序列的信息，并且这些信息已被经济学家们滥用得不再起作用了。主要问题在于，分析非线性关系的方法能否展示出现行分析方法所无法揭示的内容。与此相关的问题是，非线性的发现是否会导致具有稳定意义的革新，也就是说，观察到的所有非稳定性可否归结为非线性模型的存在。

乍看起来处境是令人沮丧的。经济或金融时间序列的证据中似乎并不存在太多的经济力量。市场法则看来在这方面也无济于事，这进一步确证了布莱克—斯科尔斯模型的假设。一旦从经济或金融时间序列中消除共同的趋势，那么看来所剩下的唯一可能性就是，经济的相互作用表现在序列方差的时间变化之中。总之，噪声支配着一切。

正如我们在下文中将要谈到的，经济数据既不同于生物

但是，迄今为止还不能说对非线性动态模型的分析已经占据了经济学的中心舞台；对主流经济学文献来讲，它们仍然是例外，即使这常常是些具有伟大意义的例外。这种现状是令人惊讶的，因为在可能是非线性的世界中，政策的有效性主要决定于掌握决策的正确时机，同时也决定于有利可图的投机活动是否具有稳定性。

也许，描述非线性动态作用的最佳方法是分析一些例子。我们将建立一个简单的对超额需求的市场反应模型，然后逐渐使其更具有真实性。虽然没有一种模型可以严格地用来描述实际市场运行的动态特征，但对此所做的讨论将有助于理解非线性系统所发挥的潜在作用。

我们的目的并非是提供直接可应用的模型，而是为了强调动态系统的固有特征。某种形式的振荡行为几乎是大多数常见动态系统的基础。因此，下文我们所讨论的方程可以被看成是基本范例，它们在众多的学科中不仅提供了有用的见解，而且也提供了实际的预测。我们应该认真地看待作为简单范例的下述方程；它们并不仅仅是经济学家对微观联系的另一种看法。

我们都知道，超额需求会创造出通常能抵销其自身的经济力量。如果事实真是这样的话，那么这种反作用的发生必须是通过超额需求变化的加速来实现的。这是理解下文所讨论的中心思想的关键。这一看法至少可追溯至萨缪尔森、古德温、卡莱茨基与菲利普斯。

10.2.1 某些简单的市场调节动态模型

第一个简单的模型将部分地违背人们所熟知的市场之间

强烈相互依赖的信条，并且不强调价格作为均衡市场因素所发挥的作用。但它的简单性将会促进对观点的阐释。

符号 χ 表示某个市场上在一个给定时点 t 对一种给定商品的超额需求量。这种商品可以是特定的真实商品，如小麦或家常小甜饼，也可能是某些股票。假定 χ 是时间 t 的连续可微函数。在现阶段的分析中，不存在随机误差因素。

$\dot{\chi}$ 表示 χ 的时间导数，它是超额需求的变化率。

市场总存量或市场规模用 S 来表示。由于 S 决定着超额需求 χ 所影响的范围，所以为了分析之便，假定 S 是不变的。

$\ddot{\chi}$ 是超额需求变化的加速度；它是时间 t 的一个连续可微函数。这种规定不仅在直觉上是可信的，而且它也是振荡动态概念的基础，这一点许多年前萨缪尔森和古德温就已意识到了。

倘若经济力量要对超额需求这种外生振动作出反应以便恢复均衡，那么为满足从超额需求的零速度向某种非零速度的转变，首先加速度必须是非负的。“首先”改变的是超额需求的加速度；如果局部线性系统是实现稳定的首要的必要条件，那么加速反应的方向将和位移（即超额需求 χ）的方向相反。

价格是把供需关系转化为超额需求函数的一个指标函数。价格在这个模型的公式表述中是隐含的。我们可以从这种表述中推出下述结论：

$$\dot{P}=k\dot{\chi} \tag{1}$$

进而可得出：

$$P=k_0+k\chi \tag{2}$$

其中，k 和 k_0 是由经济条件和计量单位所决定的常数，k_0 为

均衡价格。一个更为真实的模型应该考虑到非负超额需求的发生与价格 P 变化之间的滞后，以及 P 变化与“恢复力”的加速度之间的滞后。由于这种复杂程度的增加所产生的影响对于现阶段的分析不具有根本性的意义，所以我们暂时可以忽略它们。

假如均衡位移的幅度已达到了 χ，那么恢复力将被假定等于 $-\sigma\chi$，其中 σ 为恢复力的“刚性系数”；σ 的值越大，恢复到初始均衡的经济力量也就越大。现在可以把我们的第一个市场“运动方程”表述为：

$$\ddot{\chi}=-\sigma(\chi/S) \tag{3}$$

或者 $S\ddot{\chi}+\sigma\chi=0$

这一方程又可重新表述为：

$$\ddot{\chi}+(\chi\eta)^2\chi=0 \tag{4}$$

方程(3)所反映的是恢复力取决于市场总存量与超额需求变化的加速度；换成另一种说法就是，超额需求(即位移)变化的方向与幅度是和相对于市场总规模的超额需求相对规模成比例的。

方程(4)预见到了下文的分析结果，它显示：σ/S 可以用反应振荡的频率 η 来重新表达，即

$$\eta=\frac{1}{2\pi}(\sigma/S)^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

在这个简单的例子中常数 χ 为 2π。方程(5)表示：反应频率随 S 增加而减少，随 σ 的增加而增加。这是和预期结果相符的。S 的值越大，对给定的位移幅度 X 来讲，该系统的惯性也就越大。σ 的值越大，恢复力也就越强，对变化的加速度的影响也就越大。当 χ 趋于零时，正如方程(3)所显示的，加速度

会放慢。

人们可以很容易地写出微分方程(3)通解的一种表达式，即

$$\chi = a\sin(\omega t + \phi); \quad \omega = (\chi \eta) \tag{6}$$

其中 a 为振荡的振幅；ω 为振荡的固有频率；ϕ 是相位(phase)；a 和 ϕ 是由初始条件决定的。

方程(6)是方程(3)的一个解这一结论很容易通过用时间对 χ 两次求导来说明：

$$\dot{\chi} = a\omega\cos(\omega t + \phi) \tag{7}$$

$$\ddot{\chi} = -a\omega^2\sin(\omega t + \phi) = -\omega^2\chi \tag{8}$$

尽管我们所定义的微分方程是极为简单的，但上述两个方程却是非常有意义的。我们直接可以看出：超额需求的一阶时间导数 $\dot{\chi}$，即超额需求的流量，"领先"超额需求状态 χ、以及超额需求变化的加速度 $\ddot{\chi}$ $\pi/2$弧度，即 90°；一个流量的导数之间缺乏相位匹配一般不被经济学家所注意。当超额需求振荡的振幅为 a 时，其速率的振幅就为 $a\omega$，其中 ω 是根据弧度模 2π 来限定的；更准确地说，速率的振幅为 $a(\sigma/S)^{\frac{1}{2}}$，加速度的振荡振幅为 $a(\sigma/S)$。这样，对于给定的超额需求量来讲，市场总规模越大，变化速率的振幅越小，这是很自然的。

现有的这个模型即使对于物理应用来说也太简单了，更不要说应用于经济学了。作为走向现实的第一步，首先让我们来修改方程(3)，允许系统存在摩擦或阻尼；这也就是说，假定对恢复力做出反应的加速度与变化速度成比例地降低。这样，我们就得出

$$S\ddot{\chi} = -\sigma\chi - \beta\dot{\chi} \tag{9}$$

其中，$-\beta\dot{\chi}$ 代表系统中摩擦力的影响。

在继续进行推理之前，有必要指出：方程(3)通解的另一种表达式为

$$aE\chi P\{i(\omega t+\phi)\},\quad i=\sqrt{-1} \tag{10}$$

其中，常数所代表的意义与前述方程相同。

方程(9)的通解是 $\chi=CE\chi P\{\alpha t\}$ 的一种类型，其中 C 是由初始条件决定的常数，α 可以是复数。如果我们把这些代入到方程(9)，那么结果是

$$CE\chi P\{\alpha t\}(S\alpha^2+\beta\alpha+\sigma)=0 \tag{11}$$

解这个方程得到下述结果

$$\alpha=-\beta/(2S)\pm\{\beta^2/4S^2-\sigma/S\}^{\frac{1}{2}} \tag{12}$$

很显然，在方程(12)中存在三种结果，它们依赖于大括号这一项的符号。如果大括号内这一项为正，这表示阻尼效应超过了恢复效应，那么我们就可以认为：通解可用双曲性正弦和余弦来表示。超额需求 χ 的解轨迹作为时间的函数最初上升，然后下降，从而形成一个单峰曲线；此时不存在振荡。

第二种情况是大括号项为零，这种情况没有什么重要意义，它仅仅是上述刚讨论过的情况与下述情况的临界状态。

第三种情况是 α 的解存在复数共轭根，这种解可表达为

$$\chi=AE\chi P\{(-\beta/2S)t\}\sin(\omega't+\phi) \tag{13}$$

其中 ω' 是由下述方程给定的

$$\omega'=(\sigma/S-\beta^2/4S^2)^{\frac{1}{2}} \tag{14}$$

很清楚，这种解轨迹是一种阻尼振荡轨迹，其中阻尼效应依赖于阻尼系数和总市场规模或所交易商品的总存量。振荡减弱至零的速度是由 $\beta/2S$ 所给定的。需要指出的是，这种阻尼系统振荡的固有频率不同于非阻尼系统的固有频率。从方程(14)中我们可清楚地看到，阻尼系统的频率减少了

$\beta^2/4S^2$，且市场规模越大，振荡频率越低。非阻尼系统的频率随$\sqrt{S}$的增加而减小。但是，当阻尼系统的频率也随$\sqrt{S}$的增加而减小时，对于较大的 S 来说，也就是对于规模非常大的市场来说，这两种频率的差别将会缩小。阻尼与非阻尼系统的振荡频率之间的差别是很小的。

迄今为止，我们一直集中于对单一脉冲、振荡的市场反应的线性描述。虽然我们可以分析一系列随机振荡对方程解轨迹的影响，但更有价值的是分析市场系统发生振荡的正弦曲线轨迹。我们可用下述方程定义“驱动函数”的影响：

$$S\ddot{\chi}+\beta\dot{\chi}+\sigma\chi=\delta\cos(\psi t) \tag{15}$$

其中，ψ 为“驱动方程”的频率，δ 是一个适当的常数。这一方程的含义是，在我们所研究的市场上，超额需求是由其他地方的活动所刺激的，例如其他某种竞争性或互补性市场上的超额需求，或者决定需求和供给的外生因素的振荡，它们都没有包含在我们基本的微分方程(3)中。

方程(15)的解由两部分构成：第一部分是方程齐次部分的解，它和方程(9)的解相同。我们更为关注的是方程所反映的长期动态，这部分的解是由非齐次方程的特解所给定的。

该解的实部为

$$\chi=(\delta/(\psi Z))\sin(\psi t-\phi) \tag{16}$$

$$\dot{\chi}=(\delta/Z)\cos(\psi t-\phi) \tag{17}$$

其中

$$Z=[\beta^2+(\psi S-\sigma/\psi)^2]^{\frac{1}{2}}$$

和前面一样，超额需求量与其速率在相位上相差 $\pi/2$，但更重要的是速率与驱动项在相位上也相差 3ϕ，其中

$$\operatorname{tg}(\phi)=(\psi S-\sigma/\psi)/\beta \tag{18}$$

这一结果的重要意义在于：如果 ϕ 为零，但只有 ϕ 为零时，驱动项与速率的相位才一致；换句话说，只有当 ψ 满足方程 $\psi S-\sigma/\psi=0$ 时，两者的相位才一致。

另外，我们看到：在低频时，$\dot{\chi}$ 领先于驱动项；在高频时，$\dot{\chi}$ 滞后于驱动项。对经验研究来讲，这种乏味的陈述却具有潜在的重要意义，因为它明确指出：外在振荡与速率反应两者会交替出现领先和滞后；只有在极个别情况下，两者才是同相位的。附带插一句，经济学家通常很少考虑 $\dot{\chi}$ 领先于驱动项这种可能性。

在放弃这些简单的线性模型之前，我们应考虑最后一种可能性：阻尼因子接近于零。此时，如果方程(6)中的调和振荡的固有频率 ω 与驱动项的频率 ψ 是不可比的(这也就是说，ω/ψ 不是一个有理数)，那么驱动系统的振荡就被称为是准周期的。一种准周期振荡是指：它可无数次地回到一个给定点附近，但决不会重复相同的轨迹。至少在一个方面，我们最后取得了一项具有经济数据特点的结果。

人们可以采用两种非排它性方式中的任何一种，把非线性引入到上述模型之中。我们可以把刚性系数作为超额需求量 χ 的一个非线性函数；我们也可以考虑修改阻尼因子。

描述非调和振子的一种简单方法是建立一个具有驱动项的非阻尼模型。这一模型的主要变化是刚性系数现在成了 χ 的一个函数，而不是一个常数了。让我们根据下述方程中 χ 的符号来分析反作用的对称性

$$\sigma(\chi)=-(\sigma_1\chi+\sigma_3\chi^3) \tag{19}$$

其中基本的运动方程为

$$S\ddot{\chi}+\sigma(\chi)=\delta\cos(\psi t) \tag{20}$$

正如以前的方程，一阶反应自然被认为是正的，即$\sigma_1>0$。但现在σ_3的符号既有可能是正的，也有可能是负的。如果σ_3为正，那么非线性项会加强线性项，或者说，对位移的反应此时比在线性条件下更大。如果σ_3为负，那么恢复力就较弱。

获得非线性模型的另一种方式是修改阻尼项。我们的基本线性微分方程，即方程(9)描述了阻尼调和运动，但它仅仅是对小振幅情况的一种近似描述。该方程显示：如果β为负，那么将出现反阻尼，该系统的能量将会无限增加。这是一个不合理的结果，即使当位移很小时也是如此。克服这一难题的一种常见的简单方法是使摩擦系数β作为位移χ的非线性函数。当位移非常小时，我们使摩擦系数为负；当位移较大时，使摩擦系数为正。这也就是说，当χ值较小时，系统会产生能量；反之，χ值较大时，该系统会耗散能量。把$\beta(\chi)$定义为：

$$\beta(\chi)=-\beta_0[1-(\chi/\chi_0)^2],\quad \beta_0>0 \qquad (21)$$

当χ值较小时，$\beta(\chi)$为负；当χ值较大时，$\beta(\chi)$为正；χ_0是该系统的一个参数，它决定组成的大或小。倘若把β的这一定义代入方程(9)，所得结果即为范德玻尔方程，其完整形式为：

$$S\ddot{\chi}+\beta(\chi)\dot{\chi}+\sigma\chi=0 \qquad (22)$$

这一方程的经济含义是，对于数量相对较小的超额需求来说，恢复力被速率项抵消了；但当超额需求变得极大时，通常的方法就开始适用了。直观的例子是对某些企业股票的需求，或者对一家受欢迎的餐馆的需求，这里受欢迎被定义为正超额需求。同时，即使超额需求为负(即存在超额供给)，该方

程也是成立的。在这两种情况下，均衡发生的微小变化都具有不稳定成分。

这一方程的解是一个极限环；对不稳定均衡（称为中心）小的偏离会发散于极限环，而大的位移却会收敛于极限环。选择 $1/(\sigma/S)^{\frac{1}{2}}$，即一个时期为时间单位，并选择一个合适的振幅单位，我们可以把方程(22)简化为：

$$\ddot{\chi}-(\varepsilon-\chi^2)\dot{\chi}+\chi=0 \quad (22')$$

其中，ε 为 β_0/ω，$\omega^2=\sigma/S$。当 ϵ 的值较小时，极限环接近于正弦曲线，振荡接近于对称；但是当 ε 的值变得较大时，极限环将不再对称，振幅呈现"锯齿"状。

现在我们第一次需要用相位图来说明问题了。相位图是相空间的图形。相空间是系统的所有可能状态通过选择合适的坐标或变量来描述的空间。特定初始条件可能会导致系统出现瞬变现象，当这种瞬变现象所形成的点消除时，相空间就概括了该系统的长期动态特性。实际动态轨迹在相空间中向之收敛的点集被称为(前向)极限集合。极限集合既可以是一个不动点，一个极限环，也可以是一个混沌吸引子，或一个奇怪吸引子。简单地说，吸引子就是动态轨迹的"吸引集"。

让我们来看一个非常简单的例子。无摩擦钟摆一旦被某种力量启动之后将会以固定频率和固定振幅摆动。相空间在这个例子中可用许多方式来表述：钟摆偏离垂直线的角度 θ_t 和速率 v_t；θ_t 和它的一阶导数 θ_t'；v_t 和它的一阶导数 v_t' 等。在本质上，用这三种方法中的任何一种所做出的相图都是相同的。正如下文将证明的，我们还可以基于 θ_t 或 v_t 的适当滞后值绘出 θ_t 或 v_t，从而得到相同性质的相图。选择滞后是为了获得成对的 $(v_t, v_{t-\tau})$、$(\theta_t, \theta_{t-\tau})$，因此滞后 τ 的自相关接近

于零。

图 10.1 是相位图的一个例子，$\dot{\theta}_t$ 是根据 θ_t 绘出的，θ_t 是在假定垂直线为零角度的前提下根据垂直线所衡量的角度。当 θ 达到（垂直线任何一侧）其最大值时，它的变化率最小，实际上为零。相应地，当 θ_t 为零时，$\dot{\theta}_t$ 达到其最大值；近环形图的下方表示钟摆从右向左摆；图的上方表示钟摆从左向右摆。

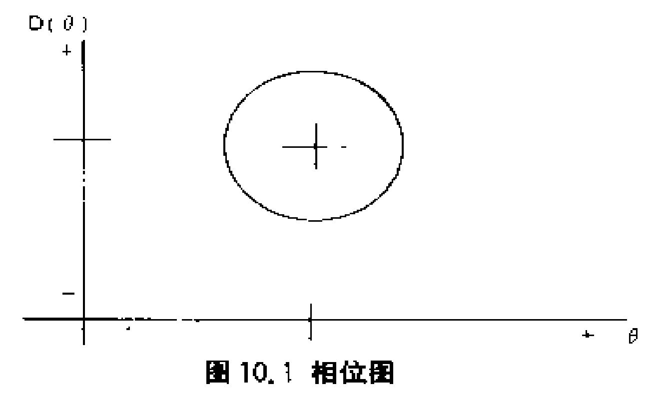


图 10.1 相位图

这是一个值得人们注意的事实：用所选择变量的任何一种组合来表示动态系统都能获得相同形状的相位图。

在上述例子中，相空间可用 $(\chi, \dot{\chi})$ 来表示，$(\chi, \dot{\chi})$ 是和定义动态系统的微分方程的流或解相一致的。对于阻尼振子来讲，当 ε 较小时，方程(22)的相位图也和图 10.1 一样接近圆形，但是当 ε 变大时，相位图接近于斜长方形。在任何情况下，相位图都表现出系统的长期动态。动态之所以被称为是长期的，原因在于其目的是为了分析瞬时行为消失之后，即轨迹对初始条件的依赖减少到零之后，长时期内动态系统的轨迹。

相空间图所描述的长期解集合中的点就是一个吸引子，即一个明显的界限选择，因为它吸引着所有动态轨道的解轨迹，这些解轨迹一开始就靠近吸引集或吸引子。

作为题外话，由方程(22)所定义的这类模型可用来描述超临界和亚临界分岔的概念，即当一个参数越过临界值时行为发生的质变。参见贝尔热、波米奥与维达尔(1984)，或古根

海默与霍姆斯(1983)等人的文章。

此外，这一模型还可描述下文将要讨论的滞后思想。在直觉上，滞后可根据一个反应函数的非唯一性来定义，因此，当反应函数达到其不稳定部分时，反应会跳过这段不稳定部分；根据达到不稳定部分的不同方向，发生跳跃的点也不相同。图 10.2 具体描述了这一观点。如果投入一直增加，产出函数将连续地到达 t_1 点，在这一点后，产出在反应函数的较低(稳定)分支上又连续增长。但是，如果投入水平在 t_1 点之后减少，那么轨迹将沿着曲线连续降到 t_0 点，在这一点上，反应函数又跳回到它上面的(稳定)部分中去了；在此之后，当投入连续下降时，产出也将连续下降。

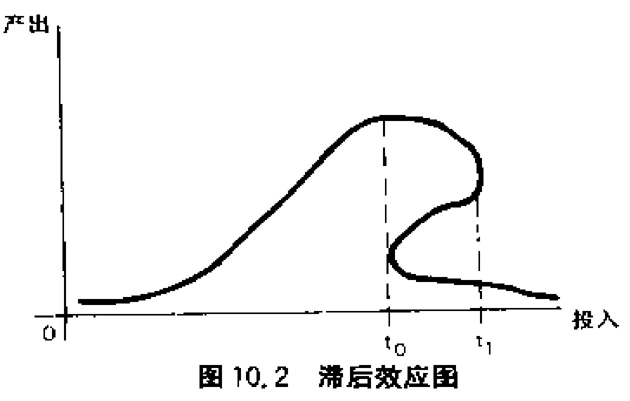


图 10.2　滞后效应图

虽然上述分析是很有趣的，但考察一个特定的例子将更具有指导意义。我们可以把前面的试验纳入到一个具有普遍性、但仍非常简单的陈述之中。下述方程就是著名的达芬方程；人们对它的构成是非常熟悉的：

$$\ddot{\chi}+\delta\dot{\chi}-\beta\chi+\chi^{3}=\gamma\cos(\omega t) \qquad (23)$$

方程(23)是最简单的达芬方程形式；为了缩短已经很长的讨论，我们没有运用具有经济意义的系数来表示该方程。

$\gamma\cos(\omega t)$是驱动项。$\delta\dot{\chi}$为阻尼因子，在这里我们再次假定它是线性的，但为正。$-\beta\chi+\chi^{3}$是第一次在方程(19)中定义了的刚性系数的非线性形式。但它的表述形式在两个

方程中存在重要的区别。在方程(23)中，χ 项系数的符号为负，χ^3的符号为正；这和方程(19)中的状况正好相反。动态效应是指：当发生小的超额需求变化时，市场以一种不稳定的方式作出反应，反作用力促进了超额需求；但当超额需求量较大时，市场最终将以相反的(稳定)方向作出强烈的反应。

虽然这一方程本身是很简单的，但它的潜在结果却有丰富的意义。迄今为止，我们的所有模型都产生了可识别的决定论解轨迹，即使解的时间轨迹明显包含着不连续跳跃。我们的解轨迹都包含不动点、周期解或上文刚提到的不连续滞后效应。相反，达芬模型可以产生显示为随机变量实现的解的时间轨迹，当然这些轨迹不具有周期性，例如参见川上(1984)。最后，我们在这里举一个混沌吸引子的例子，它是和我们前面所谈到的拥有不动点或简单周期的吸引子例子相反的。

影响解轨迹特性变化的关键因素有两个。第一是要求解轨迹具有相临轨迹的指数发散特征，即所谓对初始条件的敏感依赖。第二是长期解轨迹的极限集，也就是长期动态的最终轨迹，必须是紧的。数学上的必然结果是，即使时间轨迹是反复出现的，但完全相同的轨迹是决不可能出现两次的。

上述文字解释可用图10.3到图10.7来描述。在图10.3中，我们可以看到方程(23)的解的时间轨迹，而图10.4显示了对应的相位图。对这个解所选择的参数值为 $\delta=0.3$，$\beta=-1$，$\gamma=0.3$，$\omega=1$。把 δ 的值改为0.05，让 $\beta=0$，把 γ 的值提高到7.5，那么更为混沌的数据在图10.5到图10.7中出现了。由于需要绘出在接近零自相关滞后时的点以突出吸引子的形状，所以在相位图中所选择的滞后为40。

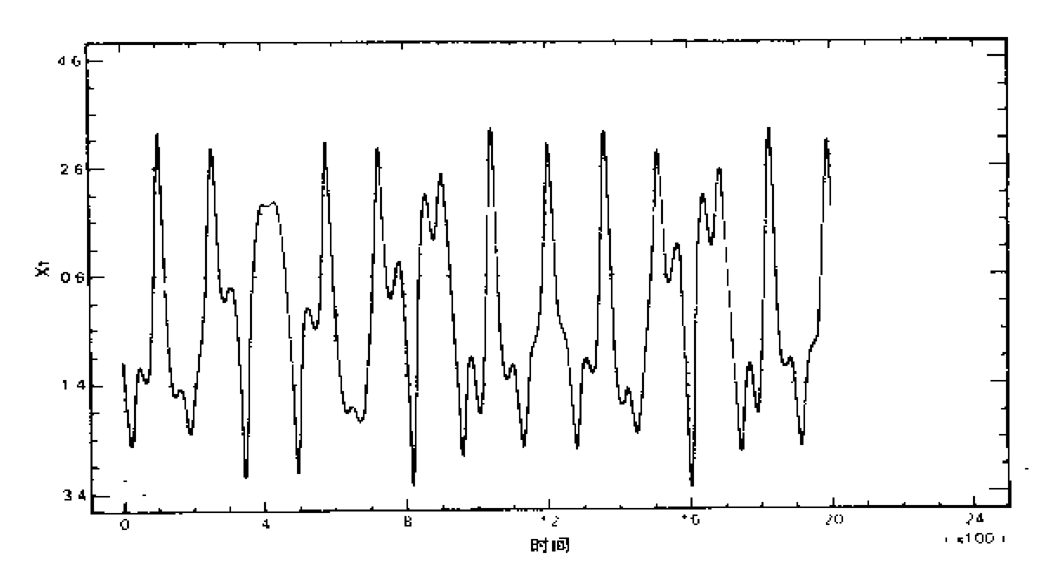


图 10.5　时间序列图：达芬方程(混沌轨迹)

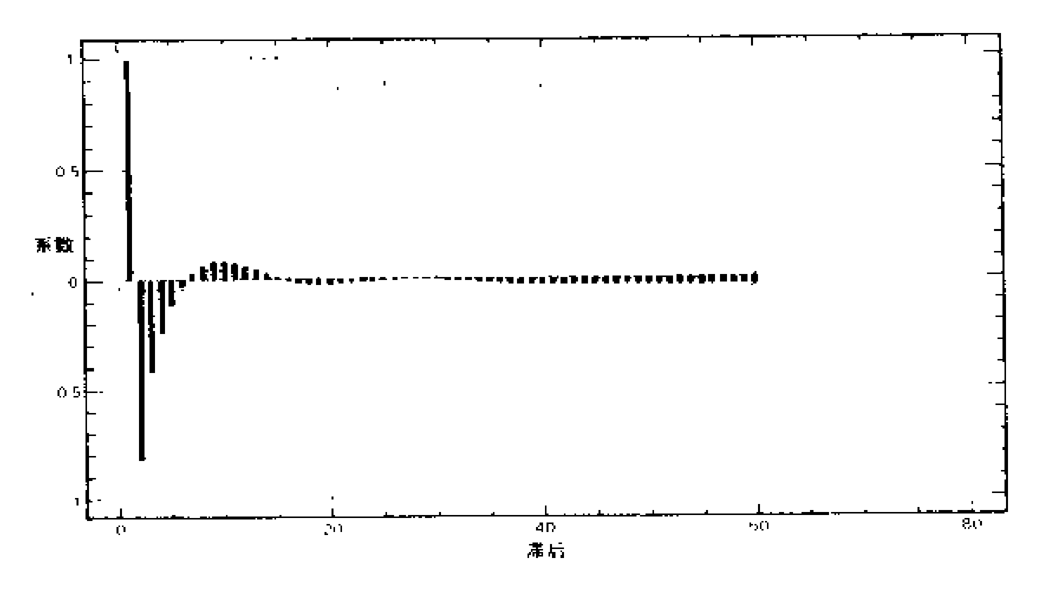


图 10.6　对达芬方程(混沌轨迹)的偏自相关的估计

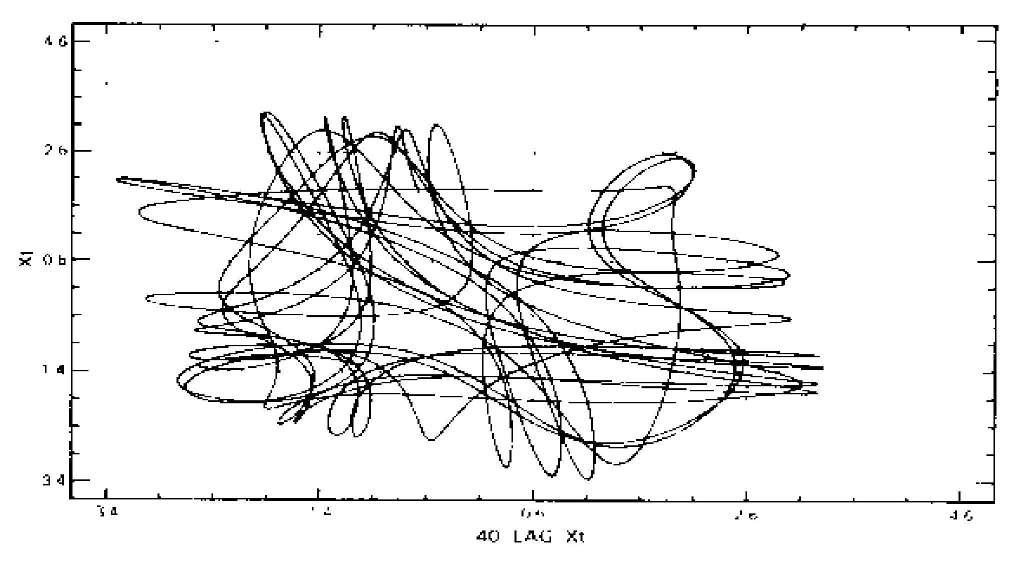


图 10.7　达芬方程(混沌的例子)的相位图

在我们超额需求模型的最后一种形式中，把滞后或延迟加入到模型的反应机制中会促进所观察到的统计复杂性的产生。正如动力学家所熟知的，把滞后加入一个微分方程实际上是把无数个自由度引入了系统，因此甚至更为复杂的解也是可能出现的。例如，参见对麦基—格拉斯方程的分析。如上所述，引入滞后是对经济模型的一种明显的扩展。人们可能会预期超额需求发生与市场开始作出反应之间存在一种滞后，这部分是由于反应通常是通过价格发挥作用的，而人们可能预期超额需求发生与随后的价格变化之间存在一种滞后。

为了不致无限地使问题复杂化，我们仅仅指出其他一些行为选择，它们是由不一定依赖于上述所讨论模型的非线性关系所产生的。需要提及的一些概念包括：振幅—频率依赖、频率拽引以及时间可逆性。

振幅—频率依赖具有下述时间序列的特点，在这种时间序列中，两个或更多的频率组分会以它们自身特有的振幅出

现，并且时间序列会在两个组分之间振荡。振幅—频率依赖显然是经济数据中相当普遍的一种现象。美国的汇率数据就具有这种特点：美元对其他主要货币的汇率呈现出高频率、低振幅波动，同时又有低频率、高振幅波动点缀其中的特点。证券市场数据也有类似的现象，只是没有如此明显罢了。

频率拽引或锁频在物理学中是一种常见的现象；当两个或者更多的相接近的频率被吸引到一个共同的频率上时，这种现象就出现了。由于存在显示出正弦曲线行为的经济现象（即使这类现象会被噪声所掩盖），所以频率拽引观点也是和经济学相关的。让我们设想一个振荡频率为ω_0的非线性市场系统，然后分析以频率ω_1发生振荡的一个补充性市场的影响。联合市场的频率为$\omega_0-\omega_1$，这被称为“拍频”；当ω_1朝着ω_0增加时，拍频会线性地下降。但是当ω_1趋近于ω_0时，拍频会突然降至零，直到频率ω_1大幅度上升至高于ω_0时为止。此时，拍频重新出现，进而当ω_1偏离ω_0时，拍频会线性地增加。同样的现象在ω_1从上方趋近于ω_0时也会发生。一项有意义的推断是，倘若相互联系的市场频率差别较小，那么它们相结合所组成市场的频率将是难以觉察到的；但反过来，这种联合市场的分离与解体将最终显示出它们振荡的性质。

最后一个概念是“时间可逆性”。时间可逆性在统计上可定义为：

$$F(x_{t1},x_{t2},x_{t3},\cdots,x_{tn})=F(x_{-t1},x_{-t2},x_{-t3},\cdots,x_{-tn}); \qquad (24)$$

这就是说，如果联合概率分布函数具有方程(24)的特性，那么时间序列$\{x_t\}$就可称为具有“时间可逆性”；反之，该时间序列则被称为具有“时间不可逆性”；其核心思想是“时光不会倒转”。静态和非静态过程都可能有时间不可逆性和可逆性，但

任何拥有高斯分布的自回归移动平均数(ARMA)过程，包括不可颠倒过程，都是时间可逆的。

由于实际上所有经济模型都隐含地假定了经济时间序列是时间可逆的，所以这一观点有着重要的意义。在分析时间不可逆过程中，人们所发现的一条线索是时间序列显示出不对称性：即时间序列上升区域的“坡度”与下降区域的“坡度”之间存在不对称性。根据这一线索，人们可直接猜想：国民生产总值统计数据具有时间不可逆性。对这一重要问题的进一步讨论可参见汤(1983)、拉姆齐与罗思曼(1988)的文章。

10.3 一个孤立时间序列的系统建模或分析

在相当长的时间里，经济建模的传统方法即使不是对一组联立行为方程所描述的整个经济进行分析，也是对一个完整市场的分析。已知的市场之间强烈的相互依赖(单一具体方程的识别问题)看来需要人们运用多重方程与多种变量。我们可以把这种方法称为系统建模方法。它是自本世纪50年代开始到向量自回归模型引人之前，大多数文献所运用的建模方法，可称为西姆斯(Sims)方法。而混沌文献的一个重要优势则是提出了第三种建模方法。

在新的定性动态文献中，建模方法的关键是“相空间的重建”，这是上文引入的一个概念。阿诺德的著作(1985)对动态系统的用语做了一个精彩的介绍。

在现实中，相空间的重建是通过下述程序完成的。在相空间内绘出时间依赖轨迹(这种时间依赖轨迹是通过把动态系统流量的时间逐次点联结起来获得的)，从而流量图就和相

空间联系起来了。正如我们上文所谈到的，相空间的特性可通过下述方式获得：或者画出系统中的实际变量，系统中的一个变量及其足够的时间导数；或者最简单的办法是绘出系统中一个变量的滞后值。为了强调吸引子的形状，我们必须选择适当的滞后长度，这一点可以通过选择一种使自相关大致为零的滞后来实现。在本质上，这种选择零自相关滞后的方法为描述吸引子提供了一个正交基。

分析相空间及其随动态系统参数改变所出现的变化可以揭示出关于动态系统性质的大量信息：不动点与周期是否存在、不动点与周期的稳定性、以及系统中是否存在奇点等等。这就是为什么物理学家如此重视相空间的原因，在相空间可用图来描绘时更是如此。

应用自然坐标主要是为了分析动态系统的位置、速率等等。一个动态系统的相空间也可根据该系统一种自然坐标的动态轨迹来描述；或者根据自然坐标的某种单调的、但非恒量的转换来描述。如果维，即“系统的基本变量或坐标的数量”，用 n 表示，那么根据一种初始坐标所做的系统向量表述和根据 n 维向量所做的系统向量表述必须是相同的。例如，为了表述初始系统的相空间，人们可以去考察一个 n 维点序列 $\{x; D(x), D^2(x), D^3(x), \cdots, D^n(x)\}_t$，$t$ 表示一段时间内的观察序列。另一种同样有用，但较为简单的方法是，在选择某种合适的 γ 之后，运用 $\{x_t, x_{t+\gamma}, x_{t+2\gamma}, \cdots, x_{t+n\gamma}\}$。后一种方法在大多数混沌动态文献中已成为标准方法。

对这种描述相位空间方法的正式证明是由茹厄勒和塔肯斯(1971)完成的，但最早的数学表述则要归功于惠特尼的嵌入定理(1944)。虽然只有当动态系统的极限集是一种光滑流

形时，这一定理才得到证明，但非常有意义的是，在许多实际例子中，相空间重建也适用于众多非光滑的、分裂的极限集。

也许在直觉上我们已经理解了为什么相空间重建是行得通的。因为微分方程系统的流或解轨迹是唯一的，所以在适当的规则条件下，流的参数方程，比如说$\{x_t, y_t, z_t, w_t\}$，可以被双射映射到参数方程$\{x_t, D(x_t), D^2(x_t), D^3(x_t)\}$中；进而，该参数方程又可被双射映射到$\{x_t, x_{t+\gamma}, x_{t+2\gamma}, x_{t+3\gamma}\}$中。双射映射既是一一对应的，又是多一对应。

这就是在混沌文献中分析（至少是开始）一个单个时间序列的依据。通过对单个变量的观察进行相空间重建与通过对完整的自然坐标集轨迹的观察进行相空间重建可以提供相同性质的信息。

当然，这种建模方法意味着：假如要根据动态系统的两个坐标，比如说x_t和ω_t，对相空间做两种重建，然后进行尺度变换及非本质的坐标轴旋转，那么这两种重建应该是相同的；虽然我们在这里回避了一种困难，即为每一种情况都选择合适的滞后γ。根据我们以前的例子，在重建相空间中运用超额需求X还是价格P都是无关紧要的，因为这两种重建方法在性质上应该是相同的。

这种方法为经济与金融数据中系统基本变化的存在提供了强有力的检验：进行两种相空间重建，并对它们加以比较。完成这项任务所面临的困难是，虽然这些评论显示与具体的单个市场相关，但是否也适用于加总的市场则不清楚。如果在单个时间序列的相位中存在小的但可觉察到的差异，或者所考察的时间序列存在相接近的但又有差异的频率，并

且我们所观察到的是联合市场的拍频，那么这一点就尤其重要。

在结束这一节之前，有必要指出：上述概念可以和识别概念联系起来。识别子系统的条件可具体分为两组。第一组条件要求：从系统的外生变量向所观察到的系统内生变量的变换应该是单一的、非本质的尺度变换。第二组条件要求：由外生变量时间轨迹所表示的隐含动态系统是相应微分方程系统的流量，这种流量描述了市场或经济系统的运动方程。这一点在经济计量学中通常没有受到重视。

在经济计量学中，识别条件通常是根据外生变量矩阵的秩来表述的，但我们前面的表述强调的是数据的动态特性。当外生变量的轨迹，比如说 $\overleftarrow{Z}_t$，是某种动态系统的流时，识别实际上就能实现了。观察到的、所要识别的行为关系必须是动态系统轨迹的非奇变换，这种动态系统的轨迹是用向量 $\overleftarrow{Z}_t$ 的时间轨迹来描述的。

单一外生变量方程的识别条件是欠严格的，但其内涵类似于上文所讨论的思想。这就是说，倘若“识别的省略变量”不会产生一个单一轨迹，那么它们的省略与方程的可识别性就是不相关的。

这一小节的结论可概括为：作为了解动态系统特性的第一步及手段，对单个典型“变量”或坐标的分析是一种有用的方法。很清楚，一旦确定了动态系统的性质，下一步的工作将要求确定具有重要理论意义的各经济变量之间的结构联系。这样一种分析现在仅仅是对动态系统已知特点所做的原始工作。

的预测优势问题。因为如果非线性模型不优于现有的模型，那么增加无用的非线性负担就无任何意义了。对这一问题的答案取决于判定模型是否成功的标准和建模的目标。

如果我们保留常见的最小均方误差估计量(mmse)，并希望不采取行动而仅仅观测未来，那么非线性模型对于我们讲是没有什么意义的。唯一改进的是对我们预测中所确立的置信区间作出更精确的估计。例如，甚至在不可逆的 $MA(q)$ 模型中，正确模型的知识除去有助于人们更精确地表述标准误差之外，不会改进我们对最小均方误差的预测。人们也可以用可靠的可逆模型作例子来证明这一点。

进而，即使存在一个构成经济数据基础的混沌模型，预测改进的潜力也仅限于非常短的时期。事实上，在这里真正的收获是了解到，无论一个人拥有多少数据，对于一个给定的精确度来讲，可预测时期仍然存在一种严格的限制。如果我们额外地加上噪声(这是有可能做到的)，那么非线性模型的优势就至少是变得有问题了。

这些非常消极的评论取决于选择了最小均方误差估计量和我们仅仅希望观察这一目标。假如我们放松了其中的任何一项限制，那么情况将会有很大改观。为了把注意力集中于核心问题，让我们设想有一个非线性模型；或者有一个不可逆的 $MA(q)$ 模型，它与可逆的 $MA(q)$ 模型具有完全相同的自相关函数。作为一个极端特例，这个可逆模型有可能仅是一个不相关的随机变化。

现在让我们改变一下目标。我们不仅仅要观察，同时也想实施政策。根据我们的模型，政策的实施假定是要修改我们所感兴趣变量的轨迹，比如说货币供应量，方法是在不论什

么样的随机变化发生的同时，我们对该系统强加一种刺激。现在，倘若我们希望估价政策的可能影响，那么了解“真实模型”就变得极其重要了。事实上，我们的政策行为改变了模型。下期产出将不可能是以前机制所导致的结果；我们已经修改了它，把我们的刺激纳入其中。正常的效应是，在没有人为刺激条件下我们所得到的结果加上“真实模型”对我们非随机刺激所做的处理，而基于“不正确模型”对政策行为进行估计将会得出错误的结论。

让我们从现在起改变最小均方误差估计量来分析系统对任何特定刺激反应的时间轨迹。关于正确模型的知识对于处理扩展了的标准函数具有根本性的意义。例如，不可逆的 $MA(q)$ 模型与拥有相同自相关函数的对应可逆模型所预测的结果是截然不同的。这可能显示出，主要反应将被推迟到初始时期之外。相反，经济学家传统上所假定的具有随机振荡的耗散系统可能会与一个混沌吸引子有相同的预期特点，但其动态轨迹却有很大差异。

进而，如果我们把系统稳定性的标准加进去，并意识到稳定性可能是依赖状态的，那么我们就再次需要非线性模型了，而线性近似也不再是一个有用的工具了。实际上，稳定性问题只能在非线性模型中形成。在线性模型中，稳定性实质上是一个没有意义的问题，因为线性模型要么产生不动点，要么发散；我们可以忽略由负特征值所导致的实际上不重要的两周期振荡。

当我们开始思索时，上述分析看来会导致我们形成关于适当建模结构的观点。沿着上述线索，人们已经做出了适当的和令人鼓舞的尝试。经济系统必须作为一种动态系统来建

模，因此我们应该开始寻找适当的运动方程。经济系统也包含嵌在动态本身之中的噪声，换句话说，噪声项进入了基本微分方程系统的解之中；这些影响也必须加以考虑。另外，还可能存在观测噪声，它们虽然会降低我们估计的准确程度，但不会有其他严重的影响。

建模所遇到的一个更为困难的现象是经济系统易受到会重置系统的间歇性振荡的影响。这里所说的振荡间歇性是指振荡时常发生，但又没有可测的基础概率分布。

在一段时间内，系统的参数有可能随技术和人口的变化而变化，但有点不幸的是这些变化通常被假定是缓慢的。

最后，正如经济学家所熟知的但又经常忘记的，对系统更深入的理解将不可避免地改变该系统，因为我们所面对的是追求最优化的理性的个人行为，不管这种理性受到多大程度的限制。

李向阳

译自《证券市场、气泡、多变性与混沌》，

克卢韦尔学术出版社 1990 年出版

第四部分

综合性研究

11 混沌与分形:技术与社会预测的新工具

西奥多·J·戈登　戴维·格林斯潘*

提要

非线性系统可以是稳定的,即收敛为一个平衡态,稳定地振荡,不稳定地发散,或在可测边界内表现出持续不断的混沌行为。通过运用一个简单的一维的非线性方程的例子,作者给出了这些行为的方式是如何被先验地决定的,但不包括那些不稳定或混沌区域的变量的特定值。进而,该方程的操作结果表明,在非线性系统中,初始条件中非常小的变动能在结果中引起巨大的、不可预测的变化。本例中所使用的非线性系统显示出分形行为,即系统的特征在所有尺度上都是重复的。作者也指出,暂时的稳定运行可能出现于不稳定区域。事实上,过去所收集的貌似随机的信息可能是混沌系

---

* 西奥多·J·戈登(Theodore J Gordon),美国未来学会主席。戴维·格林斯潘(David Greenspan),美国宾夕法尼亚医学研究所精神病学家。——译者

举办了好几次。①詹姆斯·格莱克在其可读性极强的《混沌:开创新科学》②一书中，回顾了这门新科学的起源、特征、原理、及最近的发展史。(该书之所以特别令人感兴趣，是因为它把混沌学评价为一种库恩所说的科学革命;关于动态不稳定性及其行为的概念促使许多科学家在研究范式上发生了巨大的、但又是困难的转变。理解事物本质的"古典"方法一直是通过线性化来完成的，许多人难以接受这样的概念，即无序能被研究、分析、预测，以及在某种程度上予以解释。)混沌学的实际应用主要有以下几个领域:流体动力学、心病学、石油探测、森林火灾的过程、地震预报及长期的天气分析。

我们本文的目的是:

• 对出现于该领域的无序进行系统分析的某些主要原理作出描述。

• 报告一些作者进行的实验，它可能有助于其他学者在技术、社会及经济领域内进行预测。

• 指出一些在预测和政策分析应用领域内显示出发展前途的研究方向。

在该领域早期研究中产生过重大影响的是一个非常简单的非线性方程，该方程是:

$$X_{next}=X\cdot K\cdot(1-X)$$

这是一个递归方程。在方程中，X的每一个后续值依据前一个值计算出来。K是一个控制方程稳定性的常数。我们将进一步评论该方程魔术般的变化及其在混沌学领域内的作用，

① 例如，纽约科学院(NYAS)于1977年和1979年主办了这类会议。

② 该书的中译本已由上海译文出版社出版。——译者

因为以这种分析为基础所作出的观察对于技术、社会及经济等领域的预测具有重要意义。①

在适当的地方，将加入我们设计的、与本文有联系的计算机程序，这些程序是用 Turbo Basic 语言写成的，可在具有推理记忆功能的单显微机上操作。②在所有这些程序中，计算机运算的高速度将受到人们的青睐，因为许多程序运行所需的时间较长。混沌科学终究是计算机的产物；通过一系列这类数值分析（当然还包括许多其他更为复杂的分析），关于动态系统的思路摆脱了需要通过线性化对系统进行简化这种观念的影响。

首先，运用该方程递归地导出表 11.1 所示的、第一次和随后各次叠代的 X 估计值。该表的左栏表示叠代次数，右边两栏表示对于给定的参数值 K 的 X 值。在所有情况中，X 的初始值被假定为 0.4。如表所示，当参数 K 为 2.7 时，X 很快达到其稳态值 0.6296。当参数 K 是 3.78 时，X 的行为更为复杂，在前 60 次叠代中，X 在最低值 0.1983 和最高值 0.9445 之间波动。图 11.1—11.5 展现了这些数据的图示状态。需要特别提到的是，在所有前 60 次叠代中，变量 X 的行为随着 K 的增加而变化：从稳定的到周期的，再到混沌。

通过选取参数 K 的值，我们可得到一系列 X 值：常数值；在两个或四个、甚至更多值之间以一种稳定的重复模式不断地振荡的 X 值；混沌但有界的 X 值；不稳定且无界的 X 值。

① 与该方程有关的计算是相当简单的，自从生物学家罗伯特·梅及其他学者在 70 年代早期至中期作了开创性工作以后，许多论文都涉及过这种计算方法。然而，我们还未发现任何关于在 K 值大于 4 范围内处理该方程行为的论文，而本文包括了这个方面。

② 因原文所列的计算机程序冗长繁杂，出于对篇幅的考虑，在翻译过程中从略了。——译者

表 11.1 不同 *K* 值下的 *X* 值

递归：	2.7	2.95	3.15	3.53	3.78
0：	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000
1：	0.6480	0.7080	0.7560	0.8472	0.9072
2：	0.6159	0.6099	0.5811	0.4570	0.3182
3：	0.6388	0.7019	0.7668	0.8760	0.8201
4：	0.6230	0.6173	0.5633	0.3835	0.5577
5：	0.6341	0.6969	0.7749	0.8346	0.9324
6：	0.6264	0.6231	0.5495	0.4872	0.2382
7：	0.6319	0.6928	0.7798	0.8819	0.6858
8：	0.6281	0.6278	0.5409	0.3676	0.8145
9：	0.6307	0.6893	0.7822	0.8206	0.5712
10：	0.6289	0.6318	0.5366	0.5196	0.9258
11：	0.6302	0.6863	0.7833	0.8811	0.2595
12：	0.6293	0.6352	0.5347	0.3697	0.7264
13：	0.6299	0.6836	0.7837	0.8226	0.7512
14：	0.6294	0.6380	0.5340	0.5152	0.7064
15：	0.6298	0.6813	0.7839	0.8817	0.7839
16：	0.6295	0.6406	0.5337	0.3682	0.6403
17：	0.6297	0.6792	0.7839	0.8212	0.8705
18：	0.6296	0.6427	0.5336	0.5183	0.4260
19：	0.6297	0.6774	0.7840	0.8813	0.9243
20：	0.6296	0.6447	0.5335	0.3692	0.2645
21：	0.6296	0.6758	0.7840	0.8221	0.7354
22：	0.6296	0.6464	0.5335	0.5162	0.7356
23：	0.6296	0.6743	0.7840	0.8816	0.7352
24：	0.6296	0.6479	0.5335	0.3685	0.7360
25：	0.6296	0.6730	0.7840	0.8215	0.7345
26：	0.6296	0.6492	0.5335	0.5176	0.7371
27：	0.6296	0.6718	0.7840	0.8814	0.7324
28：	0.6296	0.6504	0.5335	0.3690	0.7408
29：	0.6296	0.6708	0.7840	0.8219	0.7259
30：	0.6296	0.6515	0.5335	0.5167	0.7521

续 表

递归：	2.7	2.95	3.15	3.53	3.78
31：	0.6296	0.6698	0.7840	0.8815	0.7047
32：	0.6296	0.6524	0.5335	0.3687	0.7866
33：	0.6296	0.6689	0.7840	0.8216	0.6345
34：	0.6296	0.6533	0.5335	0.5173	0.8766
35：	0.6296	0.6682	0.7840	0.8814	0.4090
36：	0.6296	0.6541	0.5335	0.3689	0.9137
37：	0.6296	0.6675	0.7840	0.8218	0.2982
38：	0.6296	0.6548	0.5335	0.5169	0.7910
39：	0.6296	0.6668	0.7840	0.8815	0.6249
40：	0.6296	0.6554	0.5335	0.3688	0.8860
41：	0.6296	0.6663	0.7840	0.8217	0.3818
42：	0.6296	0.6559	0.5335	0.5172	0.8921
43：	0.6296	0.6658	0.7840	0.8815	0.3637
44：	0.6296	0.6564	0.5335	0.3689	0.8748
45：	0.6296	0.6653	0.7840	0.8218	0.4140
46：	0.6296	0.6569	0.5335	0.5170	0.9171
47：	0.6296	0.6649	0.7840	0.8815	0.2875
48	0.6296	0.6573	0.5335	0.3688	0.7744
49	0.6296	0.6645	0.7840	0.8217	0.6605
50	0.6296	0.6577	0.5335	0.5171	0.8477
51	0.6296	0.6642	0.7840	0.8815	0.4881
52	0.6296	0.6580	0.5335	0.3688	0.9445
53	0.6296	0.6639	0.7840	0.8218	0.1983
54	0.6296	0.6583	0.5335	0.5170	0.6008
55	0.6296	0.6636	0.7840	0.8815	0.9066
56	0.6296	0.6586	0.5335	0.3688	0.3202
57	0.6296	0.6633	0.7840	0.8217	0.8228
58	0.6296	0.6588	0.5335	0.5171	0.5512
59	0.6296	0.6631	0.7840	0.8815	0.9351
60	0.6296	0.6590	0.5335	0.3688	0.2294

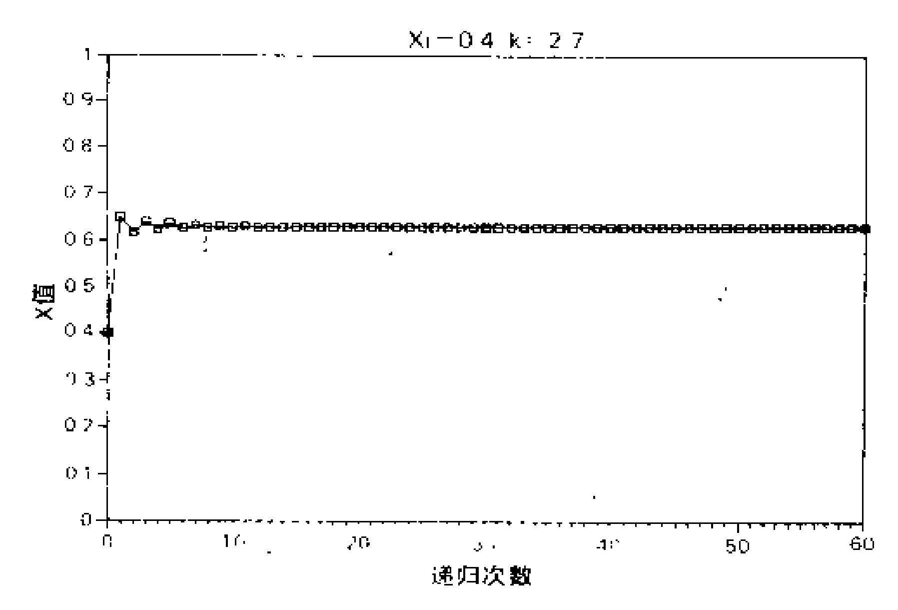


图 11.1　60 次递归的 X 值

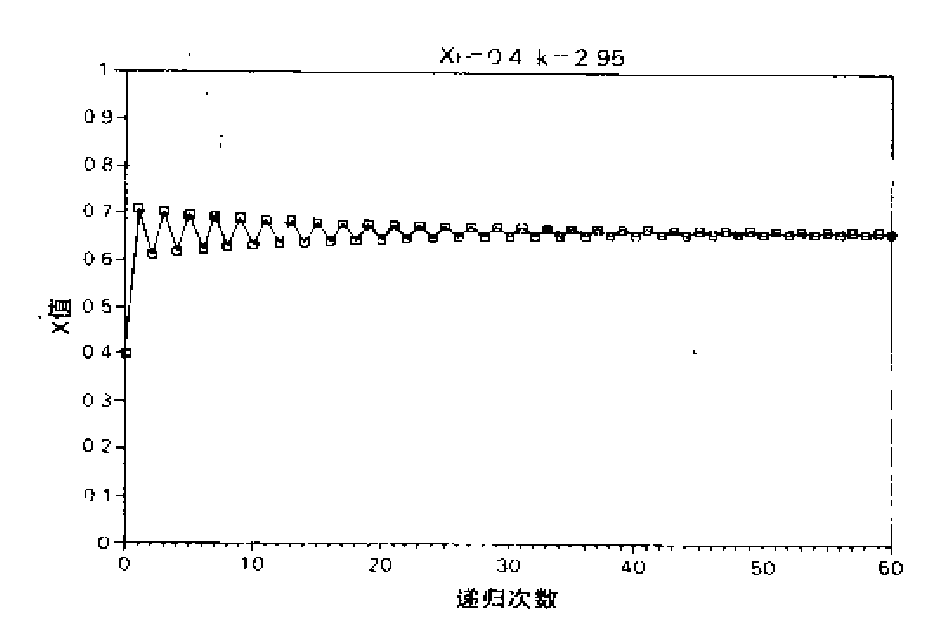


图 11.2　60 次递归的 X 值

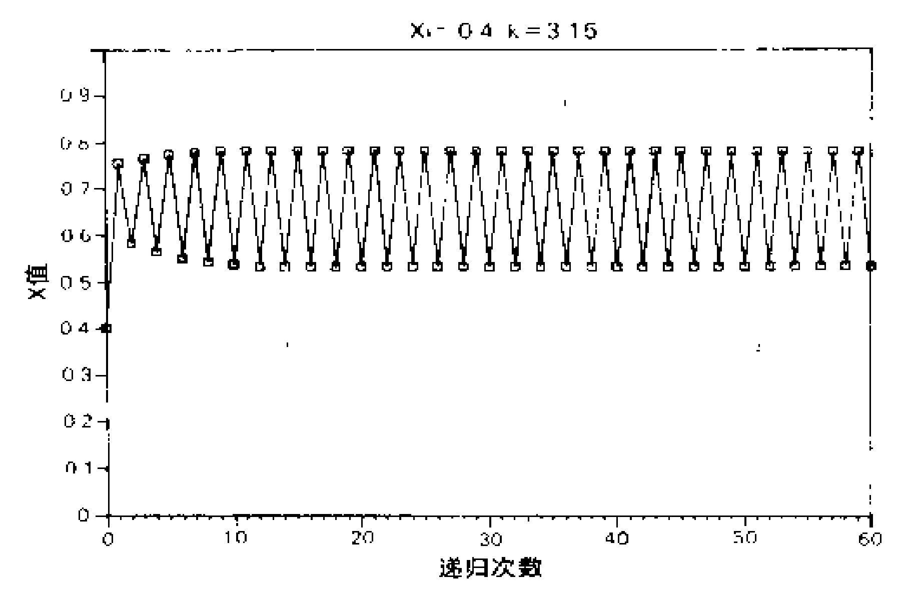


图 11.3　60 次递归的 X 值

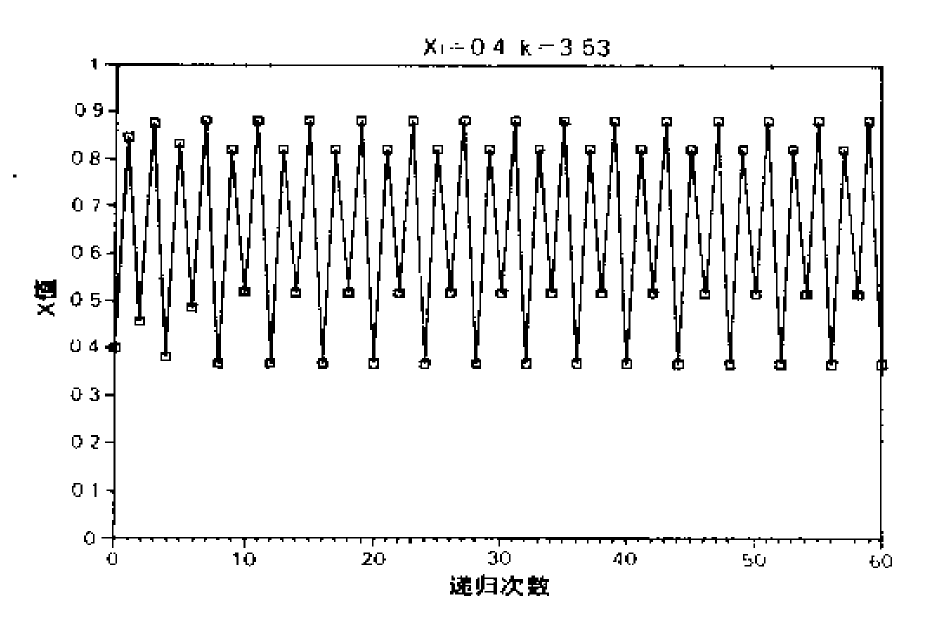


图 11.4　60 次递归的 X 值

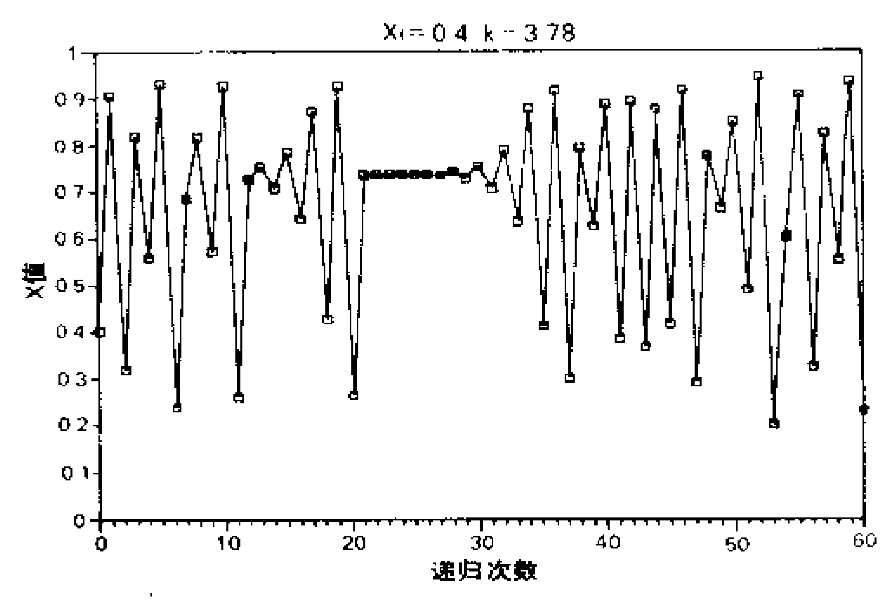


图 11.5 60 次递归的 X 值

特别需要提及的是，这种行为均由单一方程产生，该方程在某种程度上将这种范围广泛的行为包含在其所编制的指令之中。按语：在一般情况下，很难预测非线性方程可能产生的行为——它是通过运用递归方法对方程自身进行简单检验来获得的。同样的道理，面对着图 11.1—11.5 所显示的那些曲线，我们的直觉无法为产生这样一族曲线的普通方程提供任何启迪。

作为对稳定性的一个简单检验，对于稳定的均衡有

$$X_{\text{next}}=X$$

因而，X 趋于收敛的值是

$$X_e=\frac{K-1}{K}$$

对该方程可进行微分

$$\frac{dX_{\text{next}}}{dX_e}=K(1-2X_e)$$

代入上面给定的 X_e 值，得

$$\frac{dX_{\text{next}}}{dX_e}=K\left(1-\frac{2(K-1)}{K}\right)=2-K$$

对于稳定性：

$2-K>-1$

$2-K<1$

因此，K 必须大于 1 或小于 3，该方程才能产生适合于稳定的均衡状态的 X 值。对于 $K\leq 1$，这些序列的叠代趋于零，每一次叠代得到的增量逐渐减少，X 的均衡值是 0。

对于 $K\geq 3$，叠代将经过一系列的分岔，其导致混沌且有界的行为(直到 $K=4$ 为止)，再以后变得不稳定($K>4$)。对于 $K>4$，叠代值能够变得大于 1，这导致下一次叠代的结果小于零，并且将诱发一个快速的、不稳定的发散，直到 $-\infty$。①

图 11.6 表示由递归方程产生的数据的另一种图示。在此图中，参数 K 被表示在横轴上，X 值(51—150 次叠代之间)被表示在纵轴上(从图最上端的 0 到最下端的 1)。为了进一

---

① 对于方程 $y_{t+1}=Ay_t(1-y_t)$，经典混沌学的讨论范围是 $A\leq 4$ 且 $y_t\in[0,\ 1]$，当 $A=4$ 且 $y_t=\frac{1}{2}$ 时，该方程具有极大值 $\lim\limits_{t\to\infty}\max y_{t+1}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 4=1$。而在该文后半部分所讨论的 $K>4$(也即 $A>4$)的情况中，该方程的极大值的绝对值大于 1。这是因为，一旦参数值大于 4，则该方程从某一初始点出发，从其第二次叠代以后，变量 y_t 的取值范围就溢出了区间[0,1]。例如，当 $A=5$，$y_0=\frac{1}{2}$ 时，在第一次叠代中，我们有 $y_{t+1}=5\times\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})=\frac{5}{4}$；在第二次叠代中，$y_{t+2}=5\times\frac{5}{4}(1-\frac{5}{4})=-\frac{25}{16}$，…，由于 Y_t 和 $(1-Y_t)$ 的相互约束作用，此后的第一个变量值恒为负的且绝对值大于 1，直至 $-\infty$。在这种情况中，该方程的演化极其复杂，超出了经典混沌学的讨论范围，而且对它是否属于混沌学研究范畴，国外学者也莫衷一是。我们在此出于启发思路的考虑，将该文的后半部分保留下来，以供读者进一步研究之用。——译者

步解释包含于该图中的信息，图 11.7 和图 11.8 扩大了 K 的尺度。最后，在图 11.9 中，我们在图 11.6 中右侧所见到的全部分岔模式——分岔、极限环、范围的周界等——在微观水平上更为详细地被重复出来。我们可以更深入一步地观察，从而发现这种特殊图形会不断地重复。按语：**分岔是一种分形过程。**

亨利·庞加莱在1903 年说：

“一个小得被我们忽视的原因决定了一个我们不会视而不见的显著影响，于是我们说这种影响是源于偶然性。如果我们确切地知道自然法则和宇宙初始时刻的状态，我们就能准确地预测在此之后的宇宙状态。但是，即使自然法则不再是任何神秘的力量，我们仍只能近似地了解初始状态。如果用同样的近似方法能够使我们预测后来的状态——这正是我们所要求的——那么，我们可以说，这种由自然法则决定的现象已被预测到了。但情况并非总是如此，很可能发生这种情况：即初始差异中的一个微小的区别，在最终现象中会产生非常

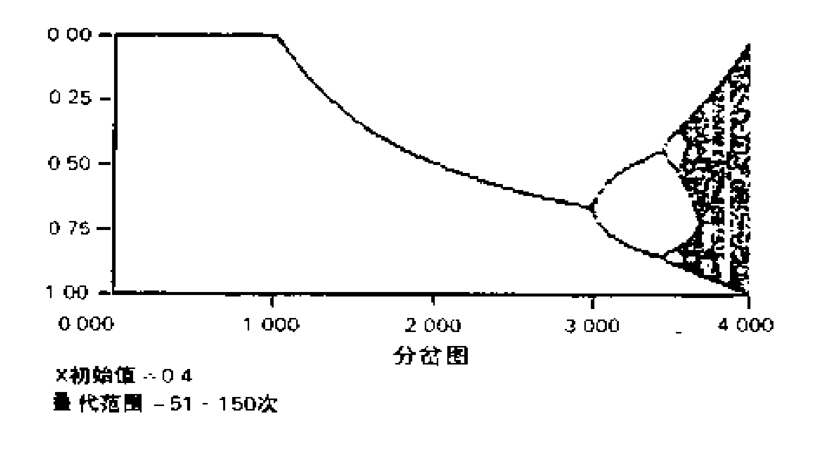


图 11.6

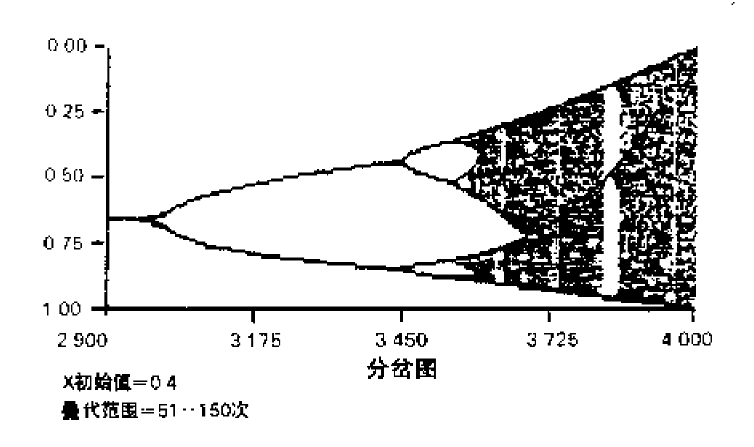


图 11.7

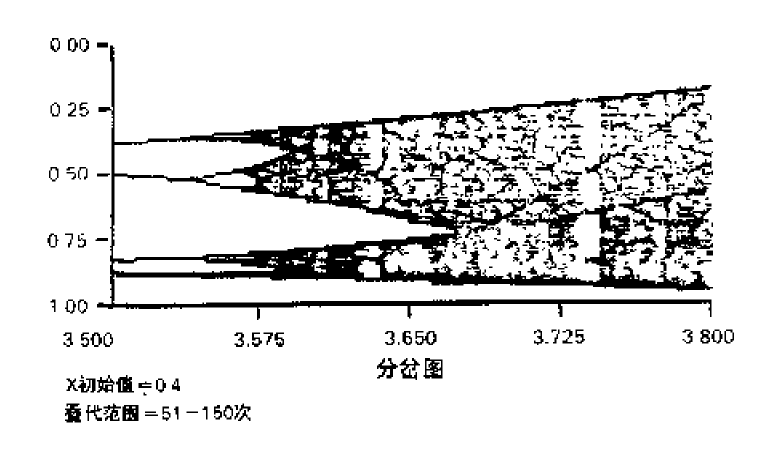


图 11.8

大的差异。失之毫厘，谬之千里。预测变得不可能，并且我们得到偶然发生的现象。”

作为庞加莱观点的一个例子，我们在一个混沌区域（$K=3.78$）内运用递归方程，并说明当该系统从两个不同的、但非常接近的初始条件——$X_i=0.40000$ 和 0.40001——出发时，X 值所发生的情况。其结果列在表 11.2 中：在第 6 次叠代时，

态还是使我们远离它。按语：尽管初始条件中极微小的差异可以在结果中产生巨大的变化，从而使做出精确的预测十分困难，但是，在非线性系统中预测混沌可能是相当有用的。

这种情形类似于从决定论预测向概率预测的转变。从事该领域研究的大多数人认为，决定论预测是极不可能的，而且通常是不适用的，而概率预测显示出更为现实的未来可能性。混沌学使我们更进了一步。对于能以非线性语言来建模的系统而言，理解该系统的活动范围是适宜的：静态的，周期性的，混沌的，不稳定的，以及导致从一种形式向另一种形式转化的条件。

表 11.2　初始点极为接近的两条曲线间的递归差异

递归：	3.78	3.78	差异
0：	0.40000	0.40001	−0.00001
1：	0.90720	0.90721	−0.00001
2：	0.31823	0.31821	0.00002
3：	0.82011	0.82008	0.00003
4：	0.55766	0.55774	−0.00008
5：	0.93243	0.93240	0.00003
6：	0.23815	0.23826	−0.00011
7：	0.68583	0.68605	−0.00022
8：	0.81447	0.81416	0.00031
9：	0.57119	0.57192	−0.00073
10：	0.92584	0.92545	0.00039
11：	0.25953	0.26080	−0.00127
12：	0.72642	0.72872	−0.00230
13：	0.75122	0.74725	0.00396
14：	0.70645	0.71391	−0.00747
15：	0.78389	0.77203	0.01186
16：	0.64035	0.66527	−0.02493
17：	0.87055	0.84175	0.02880
18：	0.42599	0.50352	−0.07753

续 表

递归：	3.78	3.78	差异
53：	0.19826	0.78507	−0.58681
54：	0.60084	0.63782	−0.03698
55：	0.90656	0.87320	0.03337
56：	0.32019	0.41853	−0.09834
57：	0.82278	0.91991	−0.09713
58：	0.55117	0.27849	0.27268
59：	0.93510	0.75953	0.17557
60：	0.22939	0.69039	−0.46100

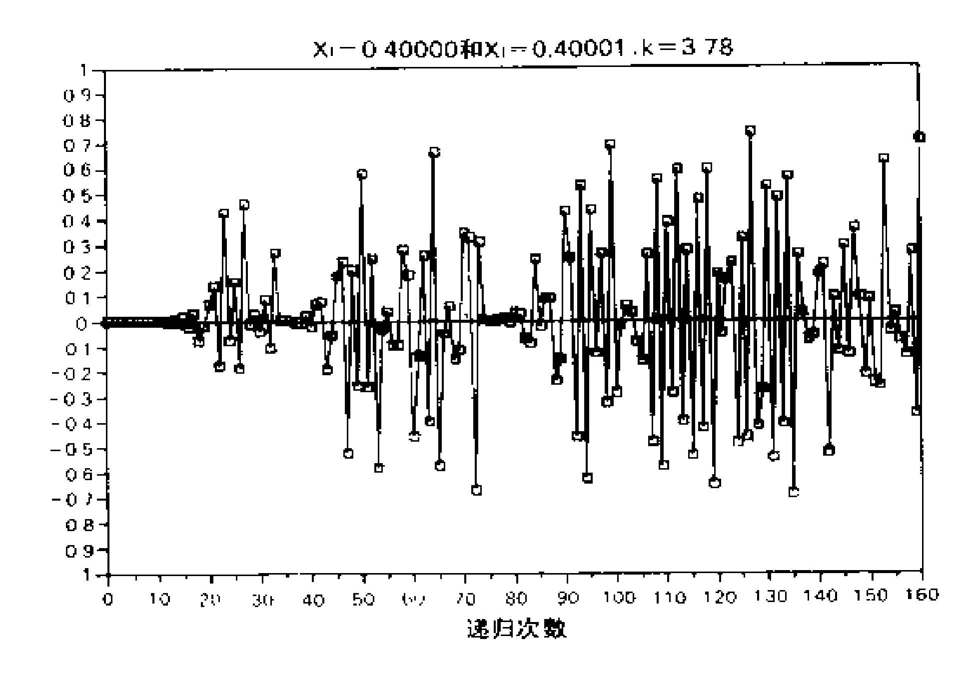


图 11.10　160 次递归的差异

类似地，我们不应假定运行于稳定区域(收敛或极限环)以外的系统不会使我们感兴趣。这些系统在一个大区间内很可能以混沌且有界的形式运行。

普适性的含义是指在所有一维非线性系统中是一致的混沌行为的某个方面。1976 年，费根鲍姆通过观测发现，在收

敛和混沌之间的区域内，导致倍周期的常数值的差异是几何相关的。这一特征已在约瑟夫森结(Josephson-juhction)模拟、对流及滴水龙头等实验中观测到。费根鲍姆的常数是4.669……。这个常数是达到倍周期所需的 K 值的差异率。很显然，随着更高的 K 值促使系统向前移动并接近于混沌，在所有类型的一维非线性系统中费根鲍姆常数都明显有效。

我们使用简单的递归方程近似地测量这个常数。从 $X=0.4$ 的初始值出发，并使方程递归运算5000次，计算出 $X(5000)$ 的值。然后我们寻找为达到与 $X(5000)$ 相差0.00001以内的 X 值所需要再增加的递归次数(NR)，即周期。将 K 的极小增量放入连续运算中，我们找到为增加递归次数以达到下一个最长周期所需的最小 K 值。我们将结果列在表11.3中。更多的递归次数和更高的精确度也许会使我们更加接近费根鲍姆常数。

表11.3 增加NR以达到下一个最长周期所需的 K 值

转变发生处的 K 值	转变期		K 值的差	K 的比率
	从	到		
2.998440	1	2		
3.448910	2	4	0.450470	
3.543900	4	8	0.094990	4.742289
3.564360	8	16	0.020460	4.642717
3.568738	16	32	0.004378	4.673367
3.569690	32	64	0.000952	4.598739
3.569891	64	128	0.000201	4.736318
3.569935	128	256	0.000044	4.568182

平均值：4.660269

%误差：0.191314

迄今为止，所列材料中的参数 K 值一直小于4，而一旦

K值大于4，情形会发生重大变化。让我们来考察一下表11.4。该表显示了在K值等于4.0001，而X初始值与以往一样是

表11.4　$K>4$的方程值

K1=	4.00010
Xi=	0.4
1	0.960
2	0.154
3	0.520
4	0.998
5	0.006
6	0.025
7	0.096
8	0.346
9	0.905
10	0.343
11	0.901
12	0.355
13	0.916
14	0.306
15	0.850
161	0.597
162	0.962
163	0.146
164	0.499
165	1.000
166	0.000
167	0.000
168	−0.001
169	−0.005
170	−0.019
171	−0.079
172	−0.339
173	−1.819
174	−20.505
175	*********

0.4 时，方程的运行状况。对于起初的 167 次叠代而言，X值处于预期的 0—1 范围之间；然而令人出乎预料的是，在此之后，X值迅速变成越来越大的负数，并从第 175 次叠代起开始溢出。图 11.11 给出了这种情形的图示。图上表示出五条独立的线：一条是按 $K=4.0001$ 的参数值画出的；其余四条选用从 4.0002 到 4.0005 的参数值。注意：这五条线中的四条在开头的 200 次递归中就运行到了尺度以外(出现负值)，但它们这种行为的有序性是出乎预料之外的。最先跑到尺度之外的是参数值为 4.0004 的线，紧接着是 4.0003、4.0005，最后是 4.0001。到第 200 次叠代时，即在该曲线右侧的尽头处，只有 4.0002 的线仍处于预期的边界[0,1]之中。

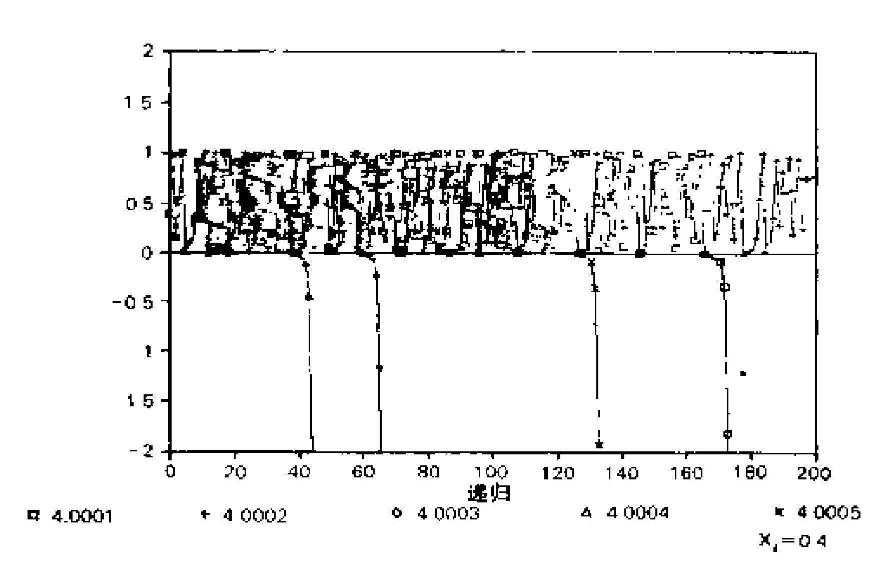


图 11.11　$X*K*(1-X)$的值

我们可以针对这种现象进行更精确的分析。考虑图 11.12：这里，我们选取的参数值范围是从 4.00040 到 4.00044；“爆炸”的次序也是从参数值 4.00040 到 4.00044 中出现；“爆炸”的有序性再度出乎预料之外。的确，非常小的差

异就导致了这些图中所描绘的那些巨变。[1]

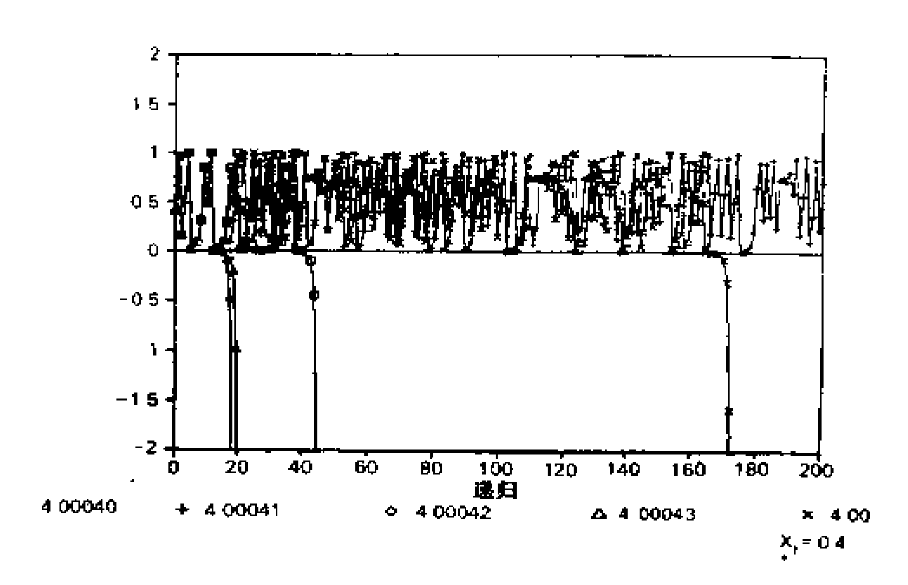


图 11.12　X*K*(1－X)的值

考虑每一次递归所代表的该点的时间区间是非常重要的。当然，递归发生于前一个递归的结果之上，因而反映了所逝去时间的方向。如果一个系统在第 181 次递归时进入无界运动状态，且每一次递归时间为一年，则该系统可保持稳定状态大约两个世纪。但如果递归速度是每周一次，则稳定期要相应地缩短。按语：当非线性系统运动加快时——它可能是由于信息的加快传递造成的——达到混沌或不稳定状态的时间相应地减少。简而言之，在任何具有潜在不稳定性的非线性系统内，加速信息流动可能是相当危险的。

图 11.13 中呈现出的"梳子状"的图示展示了这种现象的细节。例如，在该图中我们所覆盖的参数值范围从 3.9999 到 4.0010，并进行了 250 次叠代。从图上方水平轴垂直向下的

①　如果读者试图用 Lotus1－2－3 语言程序来复制这些结果，则必须象图中所示的那样准确地确定 K，使精确度达到小数点后第 15 位。

垂线的长度显示出在 X 值趋于负值之前所经历的叠代次数。图的左侧完全是黑色的，这意味着当 K 值低于 4 时，X 值在 250 次叠代中不会小于 0。然而，一旦 K 值大于 4，该参数的某些值在开头的 250 次叠代中产生出不稳定性，但这种不稳定性的产生并不呈任何规则模式。按语：在给定的合适的边界条件下，一个内在不稳定系统的稳定运行是可能的。

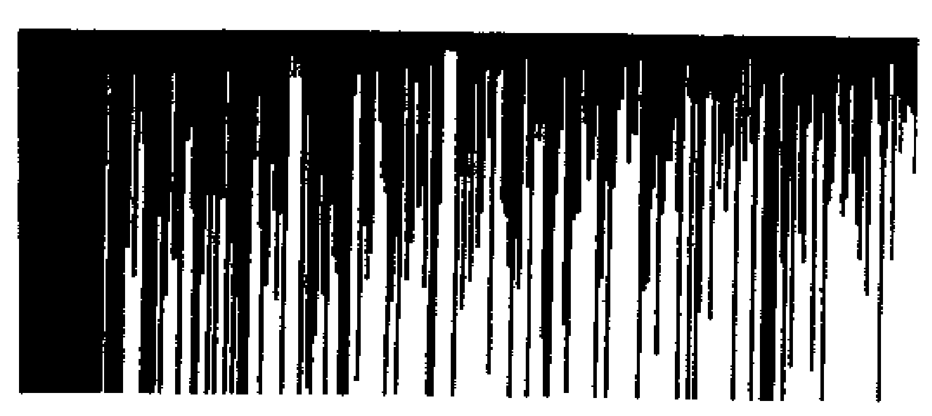
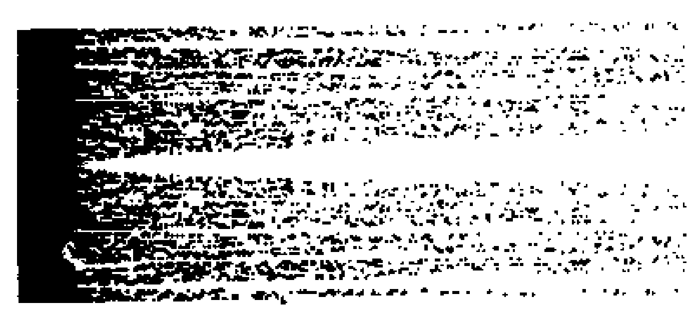


图 11.13 在不稳定性出现之前的叠代次数(黑线代表稳定性)

在既考虑 X 的初始值又考虑参数 K 的变化的前提下，我们有可能绘出方程所代表的全部区域来。图 11.14 显示了 K 值从 3.99 到 4.1，X 初始值从 0.1 到 0.9 的这种图形。数据是 25 次叠代的结果。绘点的标准是 X 值在 25 次叠代中不能为负，如果满足该条件，则在图上画出一个黑点。与前面相同，该图左侧的黑色带状表示参数值 K 低于 4 的区域内的稳定性。当 K 值大于 4 时，图上的点表示在不稳定区域中存在稳定性的位置。该图是围绕着 X_i 值等于 0.5 的一个镜像 (mirror image)。特别应提及的是，如果想要在 $K=4$ 以外

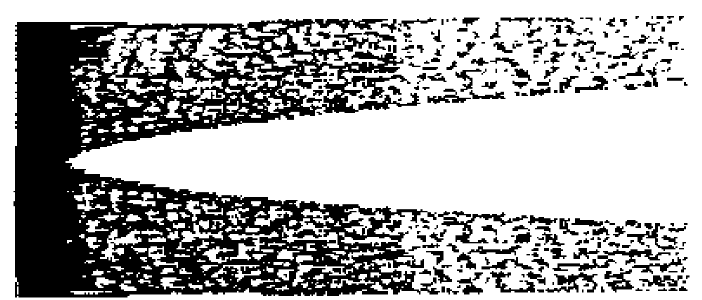
得到稳定性的机会，则选择不等于 0.5、0.9、0.1 的 X 初始值可能是比较恰当的；即便如此，也不能完全保证有稳定性，但出现稳定性的机会却增加了。



K低 = 3.990
K高 = 4.100
X_1低 = 0.10
X_1高 = 0.90
叠代 = 25次

图 11.14　区域图

图11.15是在 K 值从3.999到4.010、X_1 值从0.45到0.55区域内对上图的扩展，该图显示，不稳定性的几个卷须(tendrils)贯穿于连续的带状区域和环绕对称轴的主要



K低 = 3.999
K高 = 4.010
X_1低 = 0.45
X_1高 = 0.55
叠代 = 25次

图 11.15

不稳定区域。

在 $K=4$ 以外的区域中，我们探讨的是不稳定性，不仅仅是有界的混沌；但即使在此处，那种由递归方程所产生的无序在某种程度上也是可以预测的：我们探讨的是决定论的无序。

运用空间变换来绘制非线性系统运动的图示已受到学者们的广泛注意，该方法可以用更为简单的语言来描绘系统的运动。在这种绘制过程中，系统运行的轨迹可由速度或除了对应于时间或叠代的系统位置以外的其他类似尺度来描述；包含着这些新维数的轨道面被以拓扑方式拉长和折叠成所谓的"混沌吸引子"或"奇怪吸引子"。作为一个说明，一个钟摆的运动能够用其速度和位置来描述。在这个速度/位置的平面上，钟摆的运动是一个圆形：最大速度发生于零位置上。在摩擦力作用下，该圆形变成一个螺旋形，其中心点就是吸引子。就象倍周期的"普适性"的情况一样，某些独特的"混沌吸引子"出现于明显不同的系统之中：例如，"若斯勒"吸引子就出现于化学和流体分析之中。

一旦一个吸引子被标绘出来，则该系统的行为就可被规划出来。因此，这是使历史数据（甚至混沌数据）"适用"于预测的一条新途径。

克拉奇菲尔德及其同事将之归结如下：

"混沌的发现在科学建模中创立了一种新范式。一方面，它包含着对作出预测能力的新的基本的限制；另一方面，混沌中的内在的决定论意味着许多随机现象要比人们想象的更可预测。过去，所收集的貌似随机的信息被搁置于一边，因为它被认定是相当复杂的，现在它们却可以用简单的定律加以解释。混沌使我们在诸如天气、滴水龙头、心脏等形形色色的系统中

发现有序的存在。这个结论是一场革命，一场影响许多不同科学分支的革命。”

在这个领域中，另一种模拟形式被经常使用。此处我们提供了分形模拟的一个简单例子，它刻画了一个政治家逐门逐户地拜访其邻居以谋求他们对其事业的支持。我们所认可的规则相当简单：在任何家庭接受该政治家的提案之前，在其邻居中必须存在着至少一个已接受了政治家提案的家庭。在这个条件给定的情况下，机会概率才可考虑。在我们的模拟中，从屏幕的中央开始，我们从一个中轴呈环形向外扫描。在这种环形扫描的每一点上，我们考虑紧靠在上面的一行中的三个家庭、紧靠在下面的一行中的三个家庭、以及左边和右

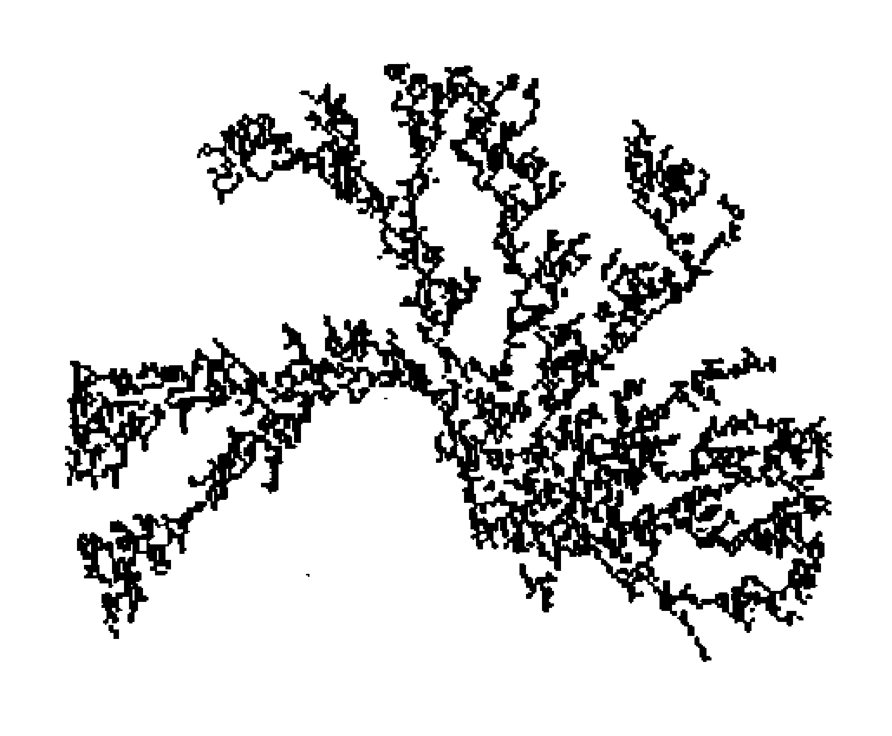


图 11.16　接受政治家提案的家庭，概率=50%

边的家庭。如果这些家庭中的任何一个接受了政治家的提案，则对考虑该提案的其他家庭才计算这种机会概率。在这些给定条件下，当概率为50%时，出现图11.16的模式；如果概率是40%，则得到图11.17中的模式；而60%的概率得到图11.18的模式。不论将来怎样运算，同样的图形不再能被准确地重制，因为它们是由随机过程决定的；但是，这些图的一般形式可望出现于以后的运算中。



图11.17　接受政治家提案的家庭，概率＝40%

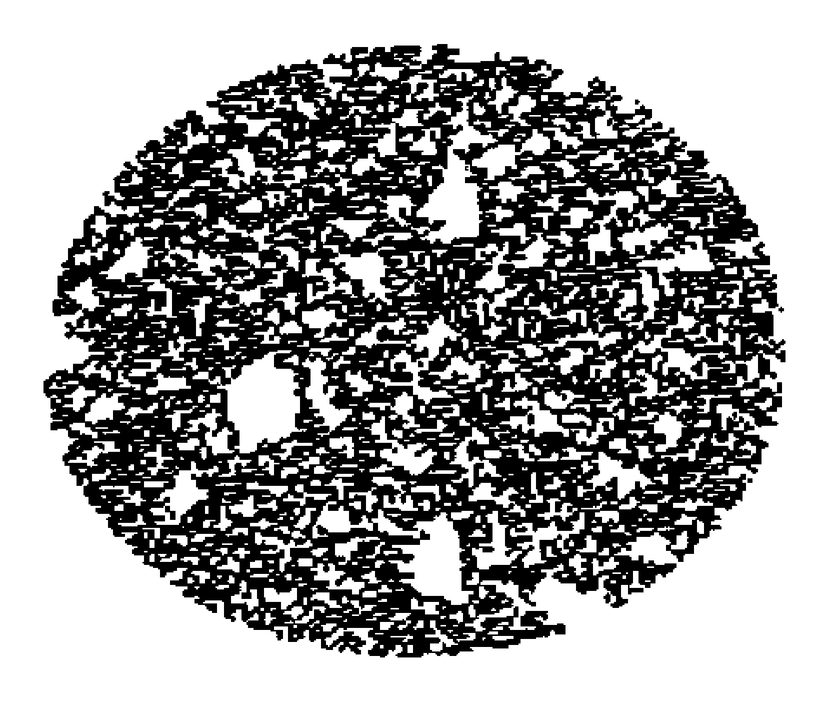


图11.18　接受政治家提案的家庭，概率＝60%

显然，尽管我们使用的是一个政治家的例子，但也可以用这类模拟来建构描述传染病、火灾、污染及产品销售等扩散的简单模型。按语：相对小的概率变化意味着所得结果的外形结构上的巨大变化。在某些适度水平的概率上，这种行为并非自我维持的，而是要消亡的。

如果我们在此处理病毒扩散问题(当然，该模拟简单得不足以绘出实况)并面对着图 11.16 的数据，我们有可能想寻找使所有邻居免于传染的原因。从该图中心延伸出的触角将提示我们：疾病传染媒介会通过河道和运输线进行扩散；而清洁的地区具有某种天生的免疫力。这两种解释都是错误的，因为传染的模式完全是偶然产生的。按语：混沌系统看上去可能会具有实际上并不存在的信息。

关于第二次世界大战期间伦敦空战的故事是家喻户晓的。人们绘制了一幅德国炸弹落点的详细分布图，炸弹落点群集式地呈现在市区图上。大量的脑力耗费、间谍智谋以及防卫设施的转移、物资供给等都被用来解释图形的模式。为什么有些地区被炸，而其他地区会幸免呢？人们为此提出了许多复杂的理论，但是结果最恰当的是每个街区上很少被击中的泊松①区是随机分布的这一理论。事实上，图形的模式被证明确实是随机的。

混沌学领域的研究者们已在试图将该领域的范式应用于复杂的社会系统。某些学者正力图将混沌学的经验教训运用于股票市场行为。这种想法对技术与社会系统行为预测的影响的确将是深远的。在“未来学会”(The Futures Group)

① 泊松(Poisson, 1781—1840)，法国数学家，在概率论中提出泊松分布。——译者

中，我们正在考虑一个研究计划，即我们将应用从混沌学中导出的一些概念去研究经济系统的稳定性，这些经济系统将采用在历史的经济数据基础上建构出来的联立微分方程组。把从混沌学中导出的一些原则应用于这些方程组的建构上的做法可能在说明下述区域时是有用的：即稳定的区域、存在混沌的区域，以及不稳定的区域。在与一位经济计量学家讨论这一项目时，本文的主要作者问道："你们的方程从未产生过振荡的结果吗？"这位计量经济学家答道："当然产生过。但当振荡的结果发生时，我们就重新估计该方程并搜寻更为稳定的解。"然而，这种初生的不稳定性可能是更深入理解经济系统动态的关键。

政治家模型对预测市场和社会行为也是恰当的。例如，在群体中关于一种新产品的信息传播就可以用这种方式来模拟。一个消费部分的购买倾向可能是信息的可得性、消费者的经济状况及他们临近销售点程度的函数。为了模拟激励作用，我们把一个概率函数也纳入考虑之中。我们能够运用传统的市场研究来建构这种模拟的系数。所有这一切使我们能够导出既在地理分布、又在人口统计、也在某些其他种类的社会行为等三种意义上规划新产品扩散的模型。与市场学结合的这种方法及其研究观点可能是强有力的。

至于精神病学，它是本文作者之一的研究领域，我们不知道感情状态之间的转化、脑电图模式、睡眠/苏醒周期及思维过程等是否能被更好地模型化并被理解为混沌的非线性系统。甚至像库恩所描述的科学进步——从一个革命到另一个革命——也提醒我们注意它是一种我们在此已作了说明的混沌系统。

- 不稳定但有界：$3>K_2-K_4\geqslant 2$
- 不稳定：$K_2-K_4\geqslant 3$

从该模型导出的分岔图显示于图 11.19—11.21 中。横坐标是 K_2-K_4，它在 0—3 范围内；纵坐标显示在叠代 1—24 次中的总存量(当然，叠代可表示月或年)。

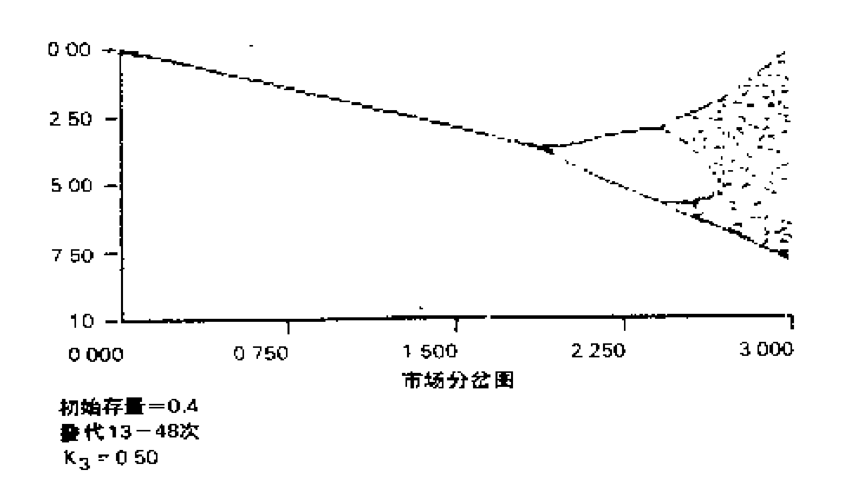


图 11.19

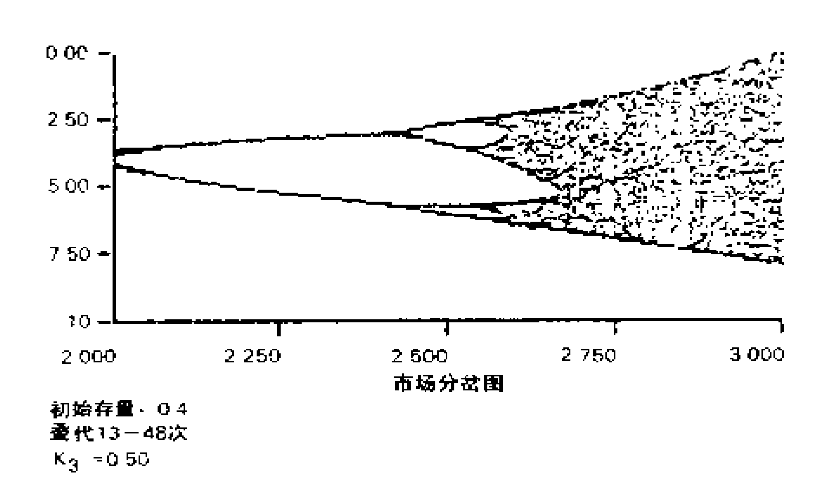


图 11.20

出状态空间维数的下界。这一推断特别令人感兴趣，因为在包括经济学在内的所有科学当中，人们对于决定能够解释数据的最简单理论感兴趣是很自然的（可能这正符合米尔顿·弗里德曼的实证经济学方法论）。格拉斯博格—普罗卡恰算法确实产生了解释数据所需复杂性（即维数）的下界，因此，这种算法的目标在经济学中显然很重要。

从上面的讨论中可以明显看出这种算法的有限性。这种算法是单变量的，也就是说，它只能应用于观测函数能映射成标量观测值的情况。这一限制肯定要求大样本数据，因为在没有非常大的样本容量时，单变量的时间序列观测值无法弄清楚高维系统的维数。对小样本标量变量的观测值来说，没有足够的信息使得吸引子集合能够揭示高维系统的详细特征。因此，在小样本系统中，这种算法或者是不适用的，或者产生维数的极端保守下界。在任何情况下（即使是大样本情况），这种算法都不能产生无偏差或者一致性的维数估计，因为这种估计总是一个下界。由于在统计量检验的样本分布问题上的近期研究进展，至少这些限制被部分地抵消了；但是，无疑在多变量扩展算法实现之前，这种推断在计量经济学上的有效性是有限的。

尽管这种算法有局限性，以及相应文献处于早期发展阶段，但是讨论一下传统计量经济学或者统计推断方法是否能够给出明显更好的选择仍然很有价值。正如下文中我们将要表明的那样，传统推断方法并没有给出更轻松的选择。这种推断的性质是，传统统计方法并不是很容易用于实际的。

12.1.2 几种可供选择的传统方法

用传统计量经济学方法估计最小维数有三种逻辑上的可能性：时间序列方法、结构性非嵌套假设检验方法和结构性嵌套假设检验方法。时间序列方法是三种方法中希望最小的方法。时间序列方法在生成关于时间序列数据特性的推断时非常有效。这种方法在返回到另一个空间(状态空间)去生成结构推断时通常不太有效；而两个空间的渐近通道是奇怪吸引子理论最有潜力之处。第二种方法，即结构性非嵌套假设检验方法是很难实现的。非嵌套假设检验本身就是有争议的。例如，这种检验的幂函数是什么？更麻烦之处可能是这一问题很难按照这种方式来表述。人们必须考虑无限个非嵌套结构模型存在的可能性，而且必须用假设检验进行比较以求得维数估计。即使这样，我们也并不清楚这种推断在多大程度上能与格拉斯博格—普罗卡恰估计相比较。在格拉斯博格—普罗卡恰估计中，其思路在于找寻最简单的模型及其维数。假设检验方法，无论是嵌套的还是非嵌套的，通常都是寻求唯一的正确模型，而不是最简单的模型。最简单的模型可能是通过排除不具有统计显著性的高维数而发现的。

下面我们讨论第三种方法：嵌套假设检验。这种最传统最古老的统计方法在传统的非混沌方法中是最有前途的。在这种情形中，我们坚持认为只存在唯一的真实模型，并努力去寻求它的尽可能最简单的形式。尤其是，我们试图减少真实模型中的变量个数，因为它包含了可能是无限多的变量。因此，相应的方法是检验变量精确加总的条件。由此所致的推断产生了一个行为难以明确的低维模型。低维模型仍然是真

实模型，它意味着在精确加总情况下，当总和变量是以精确加总理论支配下的方式进行测度时，所有经济活动主体精确地按照简化模型活动。于是，检测最低维数变成了检测可能的精确加总的最高程度。

精确加总的基本必要条件是成块弱可分性，因为弱可分性是精确加总所必须的聚集条件；而且，在线性齐次的情况下可以推论出，从分类模型中分解出的可分子函数是在弱可分聚集部分进行加总而得到的精确加总函数。因此，检测最低维数等同于检测精确加总的最高水平，或更精确地说，就是检测弱可分性的分块能力，它产生了在将变量的向量分开时可得的最小分块数目。在本文的其他部分，我们将用蒙特卡罗(Monte Carlo)方法来考察成块弱可分性的现有测试的可靠性。

我们针对单个消费者的情况进行了这些实验，试图确定对单个消费者效用函数的弱可分性进行测试的现有能力。不过，即使我们发现这种能力是巨大的，传统方式离易于应用还很遥远，因为我们必须处理对经济活动主体进行加总，并结合对商品进行加总的麻烦问题。至少，在同一商品块上，我们必须要求每一个消费者的效用函数和每一个企业的生产函数是成块弱可分的。然而，我们不必讨论这些更深入的问题，因为我们将会发现，即使是检验单个消费者效用函数的成块弱可分性也很可能已超出了传统经济计量推断的技术范围。

12.1.3 成块弱可分性

在过去的20年中，函数结构的可分性假设已经引起了计量经济学家和经济理论工作者的大量关注。可分性的实际重

要性可以从如下三个事实中得到：

① 可分性提供了经济理论中商品加总和最大化原则之间的基本联系。

② 可分性提供了将经济结构分成部门的理论基础。

③ 可分性提供了一种理论假设，它能产生有力的参数限制，从而大大简化了大需求系统的估计。

在这项研究中，我们只受第一个目标的推动，但我们的结果与检验弱可分性的三个动因都相关。可分性是一个基本的可检验假设，而且，近年来建立在可变函数形式基础上的新需求模型的发展已经使可分性假设的检验大为便利了。

不过，根据定义，可变函数形式仅仅是为了提供局部近似值而构造的；因此，在有限区域上这些模型的近似特性并未被很好理解。一些方法曾被用于探究可变函数形式的区域和全局特性，并确定诸如可分性这样的结构限制对这些模型局部特性的影响。例如，布莱考比、普里蒙特、拉塞尔(1977)证明：将可分性强加于函数的整体可以摧毁可变函数形式的局部可变特性。最近又证明：检验可分性的困难可以通过局部地进行检验和解释检验而得以克服。在本文的研究中，我们使用"近似"可分性的局部解释。我们也试着进行瓦里安的新非参数检验。现有各种可分性检验的可靠性一直不能被确定。尤其要指出的是，关于现有可分性检验的效力我们并不知道什么，相反，由布莱考比、普里蒙特、拉塞尔证明的理论结果却对这种效力表示怀疑。

巴尼特和崔胜默(1987)仔细检验了可变函数形式提供正确推断的能力。特别地，在那篇文章中我们进行了蒙特卡罗实验，它是在由三种商品 WS-分支的具有成块弱可分性的效

用函数所生成数据的基础上进行的。我们用于与模拟数据一起推断的可变函数形式是：对数变换(TL)、罗特丹模型的绝对价格形式(RM)、广义的里昂惕夫形式(GL)和三阶对数变换(3 TL)。在这里，我们集中给出了我们的结果中与商品精确加总相关的那些内容，并且分析了这些结果对成块弱可分性检验的含义。

瓦里安(1982，1983，1985)引入了关于消费者(或生产者)行为假设检验的非参数方法。他提出一种算法，可以检测一个给定数据集合是否与最大化假设一致。这种方法的优点在于它不需要特定的函数形式，因而潜在地回避了由模型的错误设定产生的问题。瓦里安的方法在检验数据与理论是否具有一致性时特别有效。但是，现有的非参数方法在可分性假设检验问题上并不令人满意。这种方法检测了数据满足可分性结构的充分但不是必要条件。这些充分条件非常严格，以至于检验严重偏向于拒绝的结果。不过，我们用瓦里安提出的 Pascal程序(第二版)以及不带随机干扰的三种商品的柯布—道格拉斯函数所产生的数据对该过程进行了检验。尽管三种商品的柯布—道格拉斯函数具有完全、强烈的可分性，从而在所有商品块上都是可分的，但是，我们没有发现满足瓦里安可分性的充分条件的任何情况。

12.2 可分性、对偶性及替代弹性

假定偏好结构用两次可微分、具有 $N+M$ 种有限数目商品的严格拟凹效用函数 U 表示，每种商品具有严格正的边际效用：

$$U=u(x, y)$$

这里 $x=(x_1, \cdots, x_N)$，$y=(y_1, \cdots, y_M)$。如果存在一个加总函数 F，使得

$$U=u(x, y)=U(x, F(y)) \tag{1}$$

那么我们称 y 在 u 上对于 x 具有弱可分性。如果加总函数同时是位似的，我们认为在 u 中 y 对于 x 是位似可分的。对于相应的间接效用函数，存在一个位似价格加总函数 P，使得

$$V=v(\bar{q}, \bar{p})=V(\bar{q}, P(\bar{p})) \tag{2}$$

这里 $\bar{q}=(\bar{q}_1, \cdots, \bar{q}_N)$，$p=(\bar{p}_1, \cdots, \bar{p}_M)$ 分别是对应于 x 和 y 的支出规一化价格向量。如果人们有兴趣检验直接效用函数的位似可分性假设，可以通过检验间接效用函数的位似可分性来进行。然而，如果数据仅仅与可分性具有一致性，而不与位似可分性具有一致性，那么对间接效用函数的可分性检验不能用于对直接效用函数的可分性检验。由于我们在本文讨论中的可变函数形式是间接效用函数的近似，故我们仅仅讨论位似的情况，以保证在近似间接效用函数和未知直接效用函数之间存在可分对偶结构。

12.2.1 位似可分性情况下的替代弹性

在两种商品的情况下，替代弹性是很容易计算的，但在三种或更多种商品的情况下，计算问题就大得多了。不过，如果效用函数是位似可分的，利用微观和总量（即宏观）替代弹性之间的关系可以大大减少计算困难。这里的微观替代弹性是基本商品之间的替代弹性，总量替代弹性是弱可分商品组精确总量之间的替代弹性。迪沃特（1974）在希克斯型加总的情

或者 y_3 和 y_4 之间的替代弹性可以通过将 q_1 和 q_2 当作单一的效用函数进行计算。在块 1 和块 2 上的任意商品之间的替代弹性可以轻易地算作给定数据点上两个总量 Q_1 和 Q_2 之间的替代弹性，这里 $Q_1=q_1(y_1, y_2)$，$Q_2=q_2(y_3, y_4)$。

12.2.2 额外数量、替代弹性和收入弹性

在消费者需求分析中的位似性被认为限制性太大，因为它隐含着对所有商品需求的收入弹性是单一值。然而，在额外数量(超过固定的认可数量)中的位似效用函数在基本数量上不是位似的。因此，一个位似效用函数可以通过将数量解释为额外数量而变成非位似函数。这种仿射位似效用函数通常称作准位似的。我们用于生成蒙特卡罗数据的效用函数是准位似的。巴尼特和崔胜默(1987)推导出一些公式来简化偏好是准位似时对弹性的计算。

令 $x=(x_1, \cdots, x_n)$ 是基本商品数量向量，令 $a=(a_1, \cdots, a_n)$ 是固定认可数量的 n 维向量。考虑一个设计好的效用函数 $u=U(y)$，这里 $y=x-a$ 是 n 维额外数量向量。假定函数 U 在 y 中是位似的，因为在 y 中 U 是位似的，所以对 y_i(对于任何 i)的需求的收入弹性是单一值，尽管对 x_i 的需求的收入弹性不一定是单一值。巴尼特和崔胜默(1987)推导出的如下定理给出了联系 x_i 的收入和替代弹性与 y_i 的相应弹性之公式。由于额外数量弹性比基本商品弹性在形式上大为简化，所以这一公式非常有用。

定理 2　假定效用函数如上面所定义，其形式为 $u=U(y)=U(x-a)$。令 p 是商品 x 的价格向量，ξ_{ij} 是 y_i 和 y_j 之间的替代弹性。那么 x_i 和 x_j 之间的替代弹性 σ_{ij} 和对 x_j

的需求的收入弹性 η_j，如下所示：

$$\sigma_{ij}=\xi_{ij}\cdot\frac{1}{1-\bar{p}\cdot a}\cdot\frac{(x_j-a_j)(x_i-a_i)}{x_j x_i} \tag{4}$$

$$\eta_j=\frac{1}{1-\bar{p}\cdot a}\cdot\frac{x_j-a_j}{x_j} \tag{5}$$

这里 $\bar{p}=(\bar{p}_1,\cdots,\bar{p}_n)$ 是对于总支出 $m=p\cdot x$ 的支出规一化价格向量 p/m。

使用公式(4)和(5)在计算上比通常方法中对弹性的直接推导要容易得多。例如，推导替代弹性通常所用的直接方法需要计算二阶导数，这在我们的公式中是不需要的。我们用本节所得结果从产生蒙特卡罗数据的效用函数中计算弹性。

12.3 真实效用函数

在生成蒙特卡罗数据时，我们选择了巴尼特(1977)的非参数 WS-分支效用树作为基本的真实效用函数。在这一模型中，树上的个体加总(“分类”)函数是一般化的 ρ 阶二次均值形式，在这些总量上定义的宏观效用函数也是如此。WS-分支效用树是 S 分支效用树(它是成块强可分的)的成块弱可分性的一般化。WS-分支模型是我们唯一关心的成块弱可分效用函数定式。另外，在每个块中商品不多于两种和块不超过两个时，这种定式就是可变函数形式。这些便是我们使用这种模型的条件。

一般化的 ρ 阶二次均值形式如下：

$$u(q_1,\cdots,q_m)=A\left(\sum_i\sum_j B_{ij}\,q_i^{\rho}\,q_j^{\rho}\right)^{1/2\rho} \tag{6}$$

这里 $\rho<1/2$；对于所有的 i，j，$B_{ij}>0$，$\Sigma_i\Sigma_j B_{ij}=1$；对于 $i\neq j$ 时，$B_{ij}=B_{ji}$；$A>0$。这些不等式保证了函数的单调性和拟凹性。为引人弱可分结构，每一个 q_r 被当作一个总量，而不是一种基本商品，从而(6)式成为在数量总量上定义的宏观函数。生成总量的加总函数形式是 $q_r=q_r(x_r)$，这里 x_r 是 x 的子向量。我们假定这些加总函数的形式与(6)式相同。由此导致的嵌套两阶段 ρ 阶均值结构产生了 WS-分支效用函数。

因为在我们的实验中考虑了三种商品的情况，生成我们的数据的真实效用函数定义如下：令 x_1，x_2 和 x_3 代表每种商品的消费数量。真实效用函数是

$$\begin{aligned} U &= U(q_1(x_1,x_2),q_2(x_3)) \\ &= A(B_{11}q_1^{2\rho}+2B_{12}q_1^{\rho}q_2^{\rho}+B_{22}q_2^{2\rho})^{1/2\rho} \end{aligned} \tag{7}$$

这里 $q_1=q_1(x_1,x_2)$，$q_2=q_2(x_3)=x_3-a_3$ 是加总函数。函数 q_1 的形式与(7)式相同，额外数量 $y=x-a$，$x=(x_1,x_2,x_3)$：

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(x_1,x_2) \\ &= (A_{11}y_1^{2\delta}+2A_{12}y_1^{\delta}y_2^{\delta}+A_{22}y_2^{2\delta})^{1/2\delta} \end{aligned} \tag{8}$$

(7)式和(8)式中的参数与(6)式相应参数所受的限制相同。在不失一般性的情况下，参数 A 可以设定为 1.0，因为 A 的选择只产生效用函数的单调变换。商品 x_1 和 x_2 在 U 中与 x_3 是弱可分的。如果 $B_{12}=0$，那么 (x_1,x_2) 与 x_3 也是成块强可分的。

因为加总函数(8)和宏观函数(7)具有同一定式，我们讨论的特性可以同等地应用于这些函数。B_{12} 和 A_{12} 系数称作交互作用系数。如果所有交互作用系数都为零，那么所有总量和宏观函数具有不变替代弹性(CES)，它们所产生的嵌套

效用树是 S-分支树，它在块与块之间是成块强可分的，在每一块内部是完全强可分的。与 CES 函数不同，带有非零的交互作用系数的一般化 ρ 阶二次均值不具有不变替代弹性，也不是强可分的。

12.4 数据生成

实验是在 60 个预先选定数量和总支出点的样本容量上进行的。我们解出了宏观和分类效用函数(7)和(8)式的参数值，产生了在中值数据点的替代弹性预选值。然后，我们将这些参数值代入 WS-分支逆需求系统，并对应于预先选择的数量和支出值解出价格值。对每一个数量和价格值集合，我们以保护总支出流量的方式在数量值中加入白噪声。这一步骤通过从假定的扰动分布中随机选择 50 个噪声向量重复进行 50 次。因此，对每一个选定的 WS-分支模型替代弹性有 50 个数据集合。相应地，对于每一个选定的真实替代弹性，我们将对近似定式的参数进行 50 次估计。

对于以上的蒙特卡罗数据生成程序，为了得到预先选定的初始数量和支出值，我们可以用一阶自回归方法生成一组随机数据。另一种选择是使用实际观测到的时间序列数据。我们采用了后一种选择，使用了巴尼特(1981，附录 D)文章中的消费数量和总支出，它的年度数据序列时间跨度非常长，可以回溯到 19 世纪后期。从巴尼特对美国易腐品、半耐用品和服务的消费观测数值中，针对实验的目的，我们采用了最先的 60 个观测值。有关数据生成程序的详细情况，可以参阅巴尼特和崔胜默 1987 年论文的附录。

12.5 近似函数

12.5.1 对数变换近似

我们考虑的第一个经验定式是对于间接效用函数的对数变换(TL)近似:

$$\ln V(\bar{p})=\alpha_0+\sum_{i\in N}\alpha_i\ln\bar{p}_i+\sum_{j\in N}\sum_{k\in N}\beta_{jk}\ln\bar{p}_j\ln\bar{p}_k \qquad (9)$$

这里 $\bar{p}$ 是支出的规一化价格向量,ln 是自然对数算子。使用罗伊恒等式可以得到下面的份额方程

$$\omega_i=\frac{\alpha_i+\sum_j\beta_{ij}\ln\bar{p}_j}{\sum_k\alpha_k+\sum_k\sum_j\beta_{kj}\ln\bar{p}_k} \qquad i=1,2,3 \qquad (10)$$

我们加上通常的同等规一化,$\sum_k\alpha_k=-1$。

布莱考比、普里蒙特、拉塞尔(1977)曾经证明: 在对数变换上强加整体的弱可分性会引致加总函数取一种有严格限制的形式。结果,对数变换形式不能有效地用于检验全局可分性,因为这种检验是关于可分性和对所导致的加总函数不切实际的限制性定式的联合检验。因此,乔根森和刘遵义(1975)以及丹尼和弗斯(1977)提出使用一种近似的局部可分性检验,即在空集假设条件下,可分性只需在单位向量 $\bar{p}=1$ 时满足即可。

如果 x_1 和 x_2 与 x_3 是可分的,局部可分性约束成为:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{\beta_{13}}{\beta_{23}} \qquad (11)$$

由于这一约束是从间接效用函数 V 中获得,所以更确切地说,条件(11)是,在 V 中 $\bar{p}=1$ 处 p_1 和 p_2 对 p_3 具有可分性。

这里 $i=1, 2, 3$。与二阶对数变换类似，$\Sigma_k \theta_k = -1$ 是通常的同等规一化。由于包括三阶项，参数的数目急剧增加。在加上进一步的理论限制之前，在三种商品情况下总共有 18 个参数，而不加限制的二阶对数变换中只有 8 个参数。

海斯(1986)就近似(局部)可分性和位似性推导了参数限制。在三种商品情况下，如果 $\bar{p}_1$ 和 $\bar{p}_2$ 对 $\bar{p}_3$ 来说是可分的，在 $\bar{p}=1$ 处对可分性的约束如下：

$$\theta_{i3} = \rho\theta_i \qquad i=1, 2 \tag{14.1}$$

$$\theta_{ij3} = \rho\theta_{ij} + \xi_1\theta_i\theta_j \qquad i, j=1, 2 \tag{14.2}$$

$$\theta_{i33} = \zeta_2\theta_i \qquad i=1, 2 \tag{14.3}$$

这里 ρ，ζ_1 和 ζ_2 是要估计的附加参数。

在 $\bar{p}=1$ 点处对局部位似性的约束如下：

$$\sum_j \theta_{ij} = \psi_1\theta_i \qquad i=1, 2, 3 \tag{15.1}$$

$$\sum_j \theta_{ijh} = \psi_1\theta_{ij} + \psi_2\theta_i\theta_j \qquad i, j=1, 2, 3 \tag{15.2}$$

这里 ψ_1 和 ψ_2 是要估计的附加参数。作为一个特例，令 ψ_1 和 ψ_2 都等于零，便得到全局线性齐次性约束。当加上全局线性齐次性约束时，需要估计的参数总数目变成 9 个。如果近似可分性约束和(全局)线性齐次性约束一起加上，需要估计的参数数目变成 6 个。请注意，如果加上线性齐次性条件，约束(14.3)便显得多余了。

从迪沃特(1974)的公式中可以推导出 3TL 的替代弹性：

$$\sigma_{ik} = 1 + \frac{E\cdot\theta_{ik}}{A_iA_k} - \sum_h \frac{\theta_{kh}}{A_k} - \sum_h \frac{\theta_{ih}}{A_i} + \sum_{jh} \frac{\theta_{jk}}{E}$$

$$+ E\cdot\sum_c \frac{\theta_{ikc}\ln\bar{p}_c}{A_iA_k} - \sum_h\sum_c \frac{\theta_{hkc}\ln\bar{p}_c}{A_k} - \sum_h\sum_c \frac{\theta_{hic}\ln\bar{p}_c}{A_i}$$

$$+\sum_{g}\sum_{h}\sum_{c}\frac{\theta_{ghc}\ln\bar{p}_c}{E} \qquad \text{这里 } i\neq k$$

对于所有的 i

$$\sigma_{ii}=1+E\cdot\frac{\theta_{ii}}{A_i^2}+2\sum_{k}\frac{\theta_{ik}}{A_i}+\sum_{jk}\frac{\theta_{jk}}{E}+E\sum_{c}\frac{\theta_{ikc}\ln\bar{p}_c}{A^2{}_i}$$

$$-2\sum_{k}\sum_{c}\frac{\theta_{kic}\ln\bar{p}_c}{A_i}+\sum_{g}\sum_{h}\sum_{c}\frac{\theta_{ghc}\ln\bar{p}_c}{E}-\frac{E}{A_i}$$

这里 $E=\sum_{k}\theta_k+\sum_{k}\sum_{j}\theta_{kj}\ln\bar{p}_j+\sum_{k}\sum_{j}\sum_{h}\beta_{kjh}\ln\bar{p}_j\ln\bar{p}_k$

$$A_i=\theta_i+\sum_{j}\theta_{ij}\ln\bar{p}_j+\frac{1}{2}\sum_{j}\sum_{k}\theta_{ijk}\ln\bar{p}_j\ln\bar{p}_k$$

12.5.3 一般化的里昂惕夫模型

我们讨论的第三个近似经验定式是一般化的里昂惕夫模型：

$$V(\bar{p})=\alpha_0+2\sum_{i\in N}\alpha_i\bar{p}_i{}^{1/2}+\sum_{j\in N}\sum_{k\in N}\beta_{jk}\bar{p}_j{}^{1/2}\ \bar{p}_k{}^{1/2} \qquad (16)$$

它的份额方程是

$$\omega_i=\frac{\alpha_i v_i+\Sigma_j\beta_{ij}v_iv_j}{\Sigma_k\alpha_k v_k+\Sigma_k\Sigma_j\beta_{kj}v_kv_j} \qquad i=1,2,3 \qquad (17)$$

这里 $v_i=p_i^{1/2}$。为了进行同等规一化，在 $\bar{p}=1$ 处我们令份额方程的分母等于 1。

令一般化的里昂惕夫模型是线性齐次的。那么可以从欧拉定理得到

$$V=\sum_{i\in N}\frac{\partial u}{\partial\bar{p}_i}\cdot\bar{p}_i$$

$$=\sum_{i\in N}\alpha_i \bar{p}^{1/2}+\sum_{i\in N}\sum_{j\in N}\beta_{ij}\bar{p}_i^{1/2}\ \bar{p}_j^{1/2}$$

根据(16)式，下面的等式必然成立：

$$\sum_{i\in N}\alpha_i \bar{p}_i^{1/2}=\alpha_0+2\sum_{i\in N}\alpha_i \bar{p}_i^{1/2}$$

为了得到近似(局部)线性齐次性，上面的约束可以加在近似点处。作为一个特例，如果 $\alpha_0=\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$，对于所有的 $\bar{p}$，以上等式在全局范围内都成立。全局约束被广泛用作具有位似性的一般化里昂惕夫模型的检验手段，我们也作类似处理。

为了得到可分性条件，我们重新考虑 $\bar{p}_i$ 和 $\bar{p}_j$ 与 $\bar{p}_k$ 是可分的情况，这里 $i\neq j\neq k$。由可分性定义直接可以得到：

$$\text{在 } \bar{p}=1 \text{ 处，} \alpha_i\beta_{jk}-\alpha_j\beta_{ik}+\sum_{h\in N}(\beta_{jh}\beta_{ik}-\beta_{ih}\beta_{jk})=0$$

我们使用这一约束检验近似可分性。

12.5.4 罗特丹模型

我们讨论的最后一个近似定式是在绝对价格形式下的罗特丹模型(RM)。在加入随机干扰前模型的定式为：

$$\widetilde{\omega}_{i,t}DX_{i,t}=\mu_i D\widetilde{m}_t+\sum_{j\in N}\pi_{ij}DP_{j,t} \tag{18}$$

这里 $i=1,2,3$，$N=\{1,2,3\}$；$\widetilde{\omega}_{i,t}=(1/2)(\omega_{i,t+1}+\omega_{i,t})$，$\widetilde{D}m_t=\sum_i\widetilde{\omega}_{i,t}DX_{i,t}$，对数变换算子 D 定义为 $DX_{i,t}=\log X_{i,t}-\log X_{i,t-1}$。参数 μ_i 局部近似于第 i 种商品的边际预算份额，π_{ij} 局部近似于在效用不变时的斯鲁茨基补偿函数 $(p_ip_j/m)\cdot\dfrac{\partial X_i}{\partial p_j}$。$\pi_{ij}$ 系数矩阵叫做斯鲁茨基矩阵。模型的

在罗特丹模型中，可分性检验不需要加入位似性，因为这个模型的可分性条件是直接从斯鲁茨基方程中推导出来的；因此，它们是商品直接效用函数 U 的可分性条件，而不是价格间接效用函数 V 的可分性条件。

12.6 估计

我们用完全信息极大似然估计(FIML)和渐近对数似然率检验统计量($-2\log\lambda$)来进行可分性检验。我们首先在除罗特丹模型以外的所有模型上加入齐次性约束进行我们的实验。线性齐次性约束不仅加在近似定式上，而且加在生成数据的 WS-分支模型上。除了罗特丹模型以外，其他所有近似定式需要加上偏好的线性齐次性，以允许可分性假设不仅以间接效用，而且以直接效用进行解释。尽管可分性的自身对偶性最终不成立，当不要求偏好是位似时，我们仍然对可分性进行了某些检验。由于在我们的结论中没有发现明显的差异，我们仅仅在齐次性约束条件下报告我们的结果。

在我们的实验中，商品 1 和商品 2 在我们生成数据的 WS-分支真实模型中与商品 3 是可分的。如果 WS-分支也是位似的，那么 $\sigma_{13}=\sigma_{23}$，我们仅仅需要定义两个替代弹性 σ_{12} 和 σ_{13}。我们的实验可以归为六个大组：

① 在可分块中两种商品间的替代弹性值(σ_{12})与另一个替代弹性值(σ_{13})被设定为在数值上相似。

② σ_{12} 的值被设定为较低。

③ σ_{13} 的值被设定为较低。

④ σ_{12} 的值被设定为 1。

⑤ σ_{13}的值被设定为1。

⑥ σ_{12}或σ_{13}两个值中的一个被设定为另一个的两倍。

在上面六大组的每一组中，进行了几个特定的实验，所以，总共有六组实验。

我们同时进行两种实验：一种是在WS-分支生成模型中对成块强可分结构（具有零交互作用系数）进行实验；另一种是对成块弱可分结构进行实验。在强可分情况下对结果的解释要清楚多了，因为在强可分性条件下WS-分支加总和宏观函数变成了CES函数。于是，替代弹性不依赖于观测值；因而，对替代弹性估计的评价和它们在可分性检验中的使用是直接在全局范围内进行的。我们发现，由于使用强可分性而不是弱可分性，关于各种模型相对长处的结论通常保持不变。因此，我们常常仅报告在成块强可分性条件下的较容易解释的结果。在这种情况下，每一个给定的分块或者同时是弱可分和强可分的，或者两者都不是。所以，在使用其产生的数据来比较成块弱可分性的检验中并不存在有效性的丧失问题。

一种例外情况是σ_{12}和σ_{13}非常接近。如果这两个弹性完全相等，那么真实函数变成三种商品的CES函数。在这种情况下，由于三种商品中的任一种总是与另外两种商品可分的，所以可分性的空集假设不能是假的。因此，一旦所有替代弹性是类似的，在生成数据时是使用成块弱可分性，而不使用成块强可分性。

12.7 结果

可分性要求在一个可分块内的任何商品与块外任何商品之间的替代弹性独立于块内商品。因此，加入可分性等同于使某些替代弹性相等。然而，不管空集假设是真还是假，在中值数据点所有真实替代弹性都是相等的，所以，如果点估计是高质量的，那么加入空集假设对点估计，因而对似然函数没有什么影响。高质量的点估计在检验空集假设时没有什么用处，除非点估计的精确度非常之高。

因此，为使可分性检验具有统计可靠性，真实替代弹性 σ_{12} 和 σ_{13} 之间应该存在重大差异。尤其要注意的是，拒绝率在空集假设是假的时候较低，在空集假设是真的时候较高。每一种近似定式在检验可分性时的结果可以归纳如下：

当加总函数中的替代弹性 σ_{12} 非常低时，四个近似定式在可分性检验中的统计效力一般不太高。有两个例外：① 在 σ_{13} 较低时的一般化里昂惕夫模型；② 当 σ_{13} 的数值离 1 不太远时的三阶对数变换。

当总量之间的替代弹性 σ_{13} 非常低时，所有近似定式通常给出较高的统计效力。有两个例外：① σ_{12} 较低时的罗特丹模型；② 当 σ_{12} 较低或特别高时的三阶对数变换定式。

当 σ_{12} 或 σ_{13} 中任一个的数值接近于 1 时，罗特丹模型和三阶对数变换定式与其他模型相比，为了提供合理的高统计检验效力，要求 σ_{12} 和σ_{13} 之间的差距更大一些。

当 σ_{12} 大于 σ_{13} 时，统计检验效力通常高于 σ_{13} 大于 σ_{12} 时的情况。

验性经济研究的基础，因为没有可分性，经济结构必然困难得难以进行经验建模。新的检验可分性的方法，也就是对维数简化而精确加总情况的检验，非常值得研究。

12.8.2 与混沌推断的比较

正如我们所见，经过许多年的发展，传统的结构性计量经济方法在估计最小维数时，其可靠性仍然存在问题，即使应用到仅有一个经济活动主体的决策时也是这样。实际上，这种方法以前从未用于估计整个经济结构的最低复杂程度（维数）。然而，大多数关于整个经济的计量经济模型都试图表现为最小复杂性的模型，因为在样本容量有限时，不必要的维数通常是要避免的。

尽管流行的格拉斯博格—普罗卡恰算法有许多局限，以及尽管有关的文献只有大约 3 年时间，新的混沌推断可以产生最小维数估计。奇怪吸引子理论最终能用于从解路径的动态特性中揭示有关未知系统的大量信息这一数学家的希望在不远的将来会成为现实。我们同意普里高津和斯滕格斯(1984)的看法：最近诞生的混沌推断理论，当它与分形几何学与测度论结合起来时，代表了科学中推断技术创新的最令人激动的前景。另外，最近证明，新的方法也适用于传统抽样理论统计推断。

相应的数学中分岔理论文献的有效性已经被证明对经济理论工作者来说是非常重要的。

万中心

译自《经济复杂性》，学术出版社 1990 年出版

13 制度动力学、决定论的混沌及自组织系统

迈克尔·J·拉齐斯基*

科学的趋势……一直是在寻求简化，即不断地将事物拆散为微小的部分……人们最终认识到，这样走下去只能是死路一条。科学家们更感兴趣的观念是，整体大于部分之和。

——D·法默

在过去的10年左右时期里，一种被称之为决定论的混沌的现象开始进入了大众出版物和经济学家们的想象之中。在同一时期，一个涉及到"自组织"系统研究的相关领域，在不同学术圈子的学者中间亦逐渐获得了相当程度的承认。虽然这些探索肇始于物理学，但它们所具有的真知灼见对制度经济学家而言，却有着极高的价值。

本文的目的在于提纲挈领地展示产生于决定论的混沌和

* M·J·拉齐斯基(Michael J. Radzicki)，美国圣母大学管理与行政科学系副教授和国际和平研究所研究员。——译者

自组织系统研究的真知灼见，并指出将其融入制度分析的潜在价值。决定论的混沌是一种稳定状态，是一种演化行为，它常常出现于非线性的、耗散的反馈系统之中。其特征表现为自我维持的振荡，这类振荡的周期和幅度是非重复性的和不可预测的，但却是由某一非随机系统所产生的。另一方面，自组织系统乃是一些非线性的、耗散的反馈系统，当跨越某一临界点时，它们会自发地产生出某种时间或空间结构，创造出层次渐高的多样性和特殊性。从自组织的角度看，社会经济的演化是以系统不稳定性导致更高水平的系统复杂性为特征的。

将混沌理论和自组织系统理论融入演化经济学的媒介是计算机。将系统动力学计算机模拟建模(computer simulation modeling)引入制度分析，会大大提高制度主义建模过程(pattern modeling process)的精确性，并注入数学的严密性于其中，从而有助于拓展现行的制度理论。正如将被阐明的，这一综合的建模过程，即"制度动力学"，也同样能够被用来揭示制度主义模型(pattern models)通过自组织行为来模仿社会经济演化的能力。

13.1 牛顿式变革和达尔文式进化之争

区分制度经济学理论同新古典经济学理论的标志之一，便是它们对社会经济变迁的刻画。在新古典理论中，一切变化均产生于某一既定的社会结构之中，因此该理论在本质上是机械论的或牛顿式的；而在制度理论中，所有的变化都是作为某一不断变化着的社会结构之结果出现的，因此这种理

论具有达尔文式进化的性质。在知道了这一观点上的根本区别，并且了解到任何计算机模拟模型都是由一组特定数学方程式构成的事实之后，提出制度动力学模型产生的动态行为是否总会是演化行为的问题，便合情合理了。这一问题的答案涉及到区分某个特别的制度动力学模型和制度动力学建模过程，用约翰·杜威的实用主义理论来说，就是要对特定的"情景"和工具的赋值过程两者进行区分。

在任何时点上，任何制度动力学模型均包含所有的具有如下性质的要素，即制度主义者业已确认的那些在过去一直、或现在正在、或将来可能对某一问题重重的社会体系施加重要影响的要素。因而，制度动力学模型是一种他或她对系统的理解或"精神模型"的明确展示，并且只能包括那些他或她认为与所研究问题相关的模型结构的各个方面。

用技术术语讲，制度动力学模型便是一个具有正负反馈环的数学模式(mathematical pattern)，并且包括那些被各种非线性"耦合"(couplings)交织于一起的积累物或数值集合。当进行模拟时，各反馈环的循环和积累效应便会随它们在时间中的相互作用而显现出来。进一步讲，当对某个制度动力学模型的模拟加以展开时，每个反馈环对该模式整体行为的贡献便不停地变化。一般来说，这种现象起因于该模式中的非线性性质，并且它可以被理解为此模型之活性(active)结构中的一种连续变化，或者被看成是一种对某一社会体系之演化行为的模仿或模拟。

在制度动力学的建模过程中，由于制度主义者对其模式的信心得到了加强，这种动态行为亦在扮演着一种重要角色，如果它同所研究的实际社会体系之演化行为密切相关的话。

能被化整为零地加以求解和加总，并以此方式来揭示整体行为。恰恰相反，其行为只能借助于对其整体结构的考察而得以揭示。这乃是对非线性系统行为大于其各部分行为之和的另一种说法。正是在此意义上，我们可以说非线性是整体主义的一个必要前提。

出现于社会系统的非线性现象所给出的最后一点启示是，当它们被纳入一种模型时，会在模拟过程中引发行为在性质上的深刻变化。这是由于它们有能力造成该模型反馈环路的强度、极性(polarity)和目标状态的改变。正是非线性关系造成了模拟过程中的模型活性结构出现自发变化或再组织，以及模型模拟社会演化的能力。

13.3　工具赋值、负反馈与不稳定性

制度经济学理论中社会演化的核心机制在于其工具赋值过程。从本质上讲，该理论假定，人类价值、需求与欲望、形形色色的商品、服务以及他们能够感受到的各种情境在大多数情况下将会提高其个人和社会的福利。因而，这些商品、服务以及情境就成了人们想方设法去追逐的目标。这一整套为某一社会系统所设立的潜在目标与手段，无论何时均是由技术水平的高低所决定的。

依据工具理论，当人们在实现某种目标的过程中遇到障碍时，或者当人们意识到某种提高其自身(或其所处社区)福利水平的机会时，社会系统就会演化。这种情况一旦出现，人们便会运用知识和理性来解决问题，在这样做的过程中亦提高了其社会的技术水平。这种突发性的创新不仅仅是为了解

决问题，而且也是为了拓展那些生活于该体系下的人们可以得到的一整套目标和手段，并最终改变人们的愿望和评价。同时，这些因技术而引发的价值和目标的变化亦会受到该社会的传统价值或礼俗价值的抵制。因此，按工具理论的解释，社会的演化过程是由技术变革与文化稳定性这两种力量之间持续不断的拉锯战或冲突构成的。

工具的赋值过程在把混沌理论与自组织系统理论并入制度经济学的过程中也能起到关键性作用。其原因在于它是一个寻求目标的过程，此过程在数学上可以用负反馈环加以表述。查尔斯·斯莱克很可能是第一个提出这一观点的人，他于1955年以负反馈的形式重新解释了约翰·杜威对反射弧概念的解释。

图13.1是一个描述简单负反馈环一般结构的框图。从该图我们可以看到，在系统的实际状态与其理想或目标状态之间存在着明显的区别。在其他条件不变的情况下，两种状态之间出现的任何差异会激发起使实际状态回到与理想状态

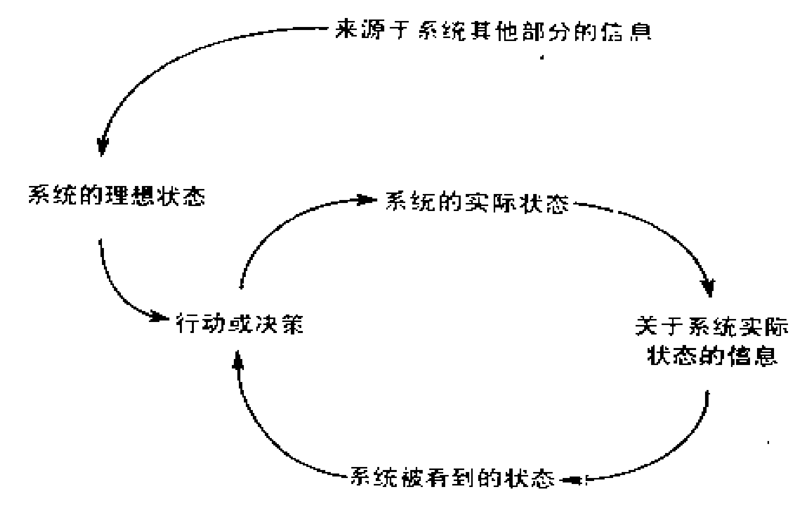


图13.1 简单负反馈环的一般结构

一样轨道的行动。然而，众所周知的经验方法却是，如果纠正行为被延误，则系统将开始波动。类似的情况常发生在社会系统中，在那里，纠正行动通常并非是迅速出现并得以完成的。举例说，人们在行动之前总是需要一段时间形成主意，而公司在矫正其库存水平差异之前也需要时间去生产新的设备。

用这种观点去分析动态反馈系统的振荡源泉，能得出以下三点极为重要的结论：第一，只有当制度动力学模型的所有实际状态与其理想状态同时一致时，该模型的均衡才会出现。此时，所有的目标均可以实现，因而在该状态下没有寻求变化的动力，也不再有波动。第二，从一般意义上讲，负反馈过程如果相对于正反馈过程是独立的，而且不受正反馈的重大影响，它就能稳定和完善系统本身以抵御外部的干扰。无论这种反馈过程是否会引起系统在稳定状态下的波动，这一点都不会改变。而另一方面，如果负反馈过程大大受制于正反馈环，它就会产生不稳定性，并使受其调控的系统敏感依赖于其参数的细微波动。拥有这种结构的许多系统均具有的特征之一就是它们能够自发地重组其结构。

第三点，恐怕也是关于上述讨论的振荡源泉的最重要的一点是，在社会系统中工具赋值过程是混沌与自组织现象的理论源泉，其原因则归因于存在于具有内在非线性特征，并受到正反馈过程影响的系统中的负反馈过程。

13.4 决定论的混沌

制度动力学模型所展示的稳定状态行为方式的显著特征之一是决定论的混沌。决定论的混沌特征可归结为不

重复的和不可预测的波动，这是由该系统产生不稳定性的机制(如工具赋值与自我强化行为相结合)和非线性约束因素(通常表现人类价值)的相互作用形成的。尽管这一"发明"不能归功于任何个人，但是非线性领域或"混沌研究"一般被公认为是爱德华·洛伦兹(1963)、米切尔·费根鲍姆(1983)及"圣克鲁斯动态系统集体"①(Gleick 1987)的开拓性发现。詹姆斯·格莱克(1987)则提供了对这些混沌问题的非技术性考察以及其他一些有关混沌的重要发现。

社会系统以热力学的开放和耗散性为其特征。热力学的开放系统不断与其周围环境交换投人与产出，以图建立和维持其自身的复杂结构。耗散系统包括各种损耗机制，它们通过不断地对周围环境释放一些确定其动态特征的因素，来抑制系统对源源不断的投入作出反映。这些损耗机制作为系统负反馈过程的一个组成部分而存在，它们通过发散环境投人物的影响使系统的实际状态维持在理想的水平上，也确保了系统动态路径的不可逆性。

耗散系统研究的重要之处在于它在自然科学中的传统解释与更广义的数学定义之间的区别。在物理系统中，在系统将高质能(对系统的投人)转化为低质能及废弃物时，耗散机制产生出熵。关于这一过程的广为人知的例子有：电流通过铜线，磨擦生热；由于引力作用，钟摆的摆动会衰减。与此对照，耗散系统的数学定义为：任何一个无论是因能量退降，还是因其他释放过程而具有一种流的负散度的系统。社会系统

① 指美国加州大学圣克鲁斯分校的肖、帕卡德、法默和克拉奇菲尔德4人在1977—1983年组成的混沌学研究小组。——译者

中与能量无关的释放过程的例子是，当人们形成预期时，信息是畅通的（也存在部分损失）。因此，就耗散的数学定义而言，随着时间的推移，社会经济系统通过使用能量和系统负反馈过程的一般活动产生出熵。也可以断言，社会系统的数学模型不需要包括能量投入就可以是耗散的和产生熵。

13.4.1 吸引子

定义耗散系统的另一种方法是运用吸引子的概念。吸引子是动态反馈系统的相空间中的一组点，它限制了其稳态运动。也就是说，它指一个系统相空间的体积，它吸引系统的演化轨道脱离其初始条件。吸引子的重要性在于，它能使观察者以几何图形的方式来检验动态反馈系统的行为和将其分类。本文将在后面的实例中对此进行详细阐述。

任何一个吸引子均可纳入下面四种不同的几何图形之一：一个点，一条封闭的曲线，一个曲面，或混沌状态。点吸引子对应于进入均衡稳定状态的系统，并且是与线性系统相吻合的唯一类型。从另一方面看，非线性系统则具有与四种几何图形中的任何一种相关的吸引子。

封闭曲线吸引子是与按某一频率、以重复方式波动的系统相联系的。最简单的例子是单周期的极限环。节拍器与健康人的心脏均是显示出极限环行为的物理系统。

曲面吸引子和混沌吸引子都是与以非重复方式波动的系统相联系的。因此，它们的实际周期均是无限的。两者的区别在于它们波动的可预测性或信息存储特性各异。曲面吸引子系统是以信息存储或可预测的方式进行波动，而混沌吸引子系统则是以信息生成或不可预测的形式进行波动。

具体来说，对于曲面吸引子的情况来说，当系统在模拟过程中发生运动时，吸引于表面两个无限靠近的点会始终保持原状；而对于混沌吸引子的情况来说，在模拟过程中同样的两个点将以指数形式发散。有趣的是，尽管这种发散会一直持续下去，但系统非线性约束力的作用会迫使点的动态轨迹彼此间偶有接近。在混沌吸引子的几何图形中，这种受约束的指数发散式运动出现的原因在于吸引子的不断扩展和自身重叠，如同一个面包师揉生面团。这种现象也恰似洗一副纸牌。依此类推，吸引子表面两个无限接近的点尤如两张在洗牌之前挨在一起的纸牌。

13.4.2 对初始条件的敏感依赖

动态反馈系统具有混沌吸引子的重要特征是令人瞩目的，这对于制度经济学理论有着潜在的重大价值。首先，这些系统对其初始条件相当敏感。这意味着从原则上讲，一般不可能预测出混沌系统的未来状态，除了在极短的时间内存在这种可能性。该论断的依据是：(1)只有实际混沌系统的一个完全设定的模型(包括结构、初始条件和参数)才能准确地预测其未来状态；(2)实际系统唯一的完全设定的模型是系统本身，如果它存在，那么模型就是毫无意义的；(3)一个完全设定的模型无论从何种意义上讲都不可能产生，因为人们无从知晓处于历史中一个特定时点的实际系统完全准确的状态，也不可能以零误差测算出其所有的参数；(4)同前所述，即使是非常近似于一种实际混沌系统的模型，也具有按指数发散并可自身重叠的动态轨迹。结果，模型的测量误差就以几何形式合并在一起，并且当系统演化时，在特定的时间内从对实际

系统近似得到的信息也被抹掉了。事实上,詹姆斯·克拉奇菲尔德及其同事曾这样写道:

> 由于非混沌系统中相邻的点随其在时间中的演进彼此相互接近,通过测量可以得到随时间推移而被保存下来的一定信息量。实际上这正意味着这种系统是可预测的:初始测量包含了可用于预测未来行为的信息……一个混沌吸引子的扩展与重叠运动系统地清除了初始信息,并代之以新的信息:扩展使小尺度的不确定性增大了;重叠使彼此完全分离的轨迹相互接近,同时剔除了大量的信息……测量混沌的尺度是运动的"熵",简单地讲,它是指扩展与重叠的平均率或信息出现的平均率。

混沌系统对其初始条件敏感性的另一重要含义是,从根本上说,随机中必然有一种潜在的有序。例如,约瑟夫·福特提出掷硬币实际上并不是一个随机的过程,因为至少从理论上讲,硬币的运动方程式能被描述出来并加以模拟。它的动态轨迹(无论硬币出现正面还是反面)并不依赖于偶然性,而是依赖于掷硬币的初始条件(硬币脱离手指的角度等等)。与之相似,C·R·克努森等人(1989)还推导出了骰子运动的方程,得出了同样的结论:从原则上讲,"系统是……可预测的"。

13.4.3 蝴蝶效应

可能有助于拓展制度经济理论的混沌系统的第二个特征是,它们能将微小的扰动放大成宏观行为,这就是通常人们所

指的“蝴蝶效应”。对此，爱德华·洛伦兹半开玩笑地指出，如果地球的气候系统是混沌的，位于巴西境内的一只蝴蝶振动其翅膀将会引发得克萨斯州的龙卷风。混沌系统具有这种特征是出于同样的不可预知的原因：即其吸引子的扩展与重叠行为。

某些非线性反馈系统放大微观扰动的能力，对制度经济学理论的发展产生了颇为深远的影响。正如A·M·萨珀斯坦指出的那样，人们能够解释出单一的个人或实体的非一般或非正常行为如何导致整个系统行为巨大的、不可预知变化的原因(Saperstein 1984)。通观历史，象亨利·福特这样的个人的确导致了技术的重大突破和巨大的社会变革。正如下面即将展开的讨论，这种特征的存在不仅为自组织理论提供了可能性，而且也为未来的建模和进一步理解社会经济的演化叩开了大门。

13.4.4 混沌的出现

许多动态反馈系统都具有一个以上的吸引子。在非线性系统中，吸引子通常呈现出不同的几何图形(即它们不都是不动点或极限环)。当初始条件明确以后，也就确定了趋向系统特定吸引子的耗散轨迹，限定了吸引子的“吸引域”，进而，可以得到一个特定动态反馈系统的所有吸引子及其吸引域的映射，称之为“相图”。这些定义为探讨非线性反馈系统出现突然的质变、自组织与向混沌转化之原因提供了必要的条件。

如果存在决定论的混沌，它通常只是一组行为(各自对应于不同的吸引子)之一，可以用一个非线性动态系统来演示。因此，对一个系统是如何使其行为从一种方式转变为另一种

变为正。目标状态中明显出现的突变，是控制极变化的结果。

事实上，至少从原理上讲，一个制度动力学模型可以经过一个费根鲍姆级联，在均衡点上会出现各个分岔，这种均衡关系的打破是由于非线性关系的作用。这给制度经济学理论提供了两点启示：第一，非线性反馈系统（如社会系统）可以在本质上是不稳定的、演化的，而不是稳定与均衡的。第二，制度主义者认为工具赋值过程好比是社会演化过程的引擎这种观点被进一步证实了，原因在于受约束或以价值为基准的追求目标行为，原则上能引起社会系统动态轨迹的巨大质变。

13.4.5 混沌与冲突

混沌理论与制度理论的综合有助于进一步理解社会冲突。冲突最广泛的定义之一为：它是由两个或多个派别在追求不相容的目标时相互影响的过程。这种关于冲突的解释完全符合制度经济学家所倡导的同一概念，因为从工具理论的角度讲，在技术引致的价值和目标与礼俗引致的价值和目标之间，在拥有权力者的价值和目标与不拥有权力者的价值和目标之间不断发生冲突，而这一状态构成了社会演化的特征。

目前，仅知三种一般制度动态结构可以产生作为其动态行为方式之一的混沌。其重要之处在于这些结构——双耦合自生振荡器（受约束的负反馈过程）——恰好满足前面对冲突下的定义。原则上讲，其结果是通过两个或多个工具赋值过程的相互作用，社会冲突可以用一个制度动力学模型来演示。如果更明确表述的话，随着两个过程间相互作用和耦合强度

的不断增加，模型将从费根鲍姆级联过渡到混沌。

13.4.6 图解：若斯勒的螺旋式混沌

为了阐明本文前面几部分中讨论过的概念，这里将引用最初由奥托·若斯勒提出的动态反馈模型。尽管它没有演示出任何一种社会经济现象（或物理现象），然而本文之所以提到它，原因在于它特别简单，可以迅速达到稳定状态，产生决定论的混沌与自组织的直观证据。一个能产生成为其行为之一的若斯勒混沌的实际制度动力学模型（即它将落入下文的几何尺度中的混沌吸引子），可见诸D·R·拉斯马森和E·莫斯科尔德（1988）的论述中。该模型初创于一家丹麦计算机软件公司的案例研究，是由丹麦技术大学的埃里克·莫斯科尔德及其同事共同完成的。最近该模型被修改并被纳入一系列的模拟实验，用以教授学生认识有关动态反馈系统的混沌源泉。

图13.2a和2b是直接取自麦金托什（Macintosh）个人

```
□ X=X+dt*(DX_DT)
  INIT(X)=1
□ Y=Y+dt*(DY_DT)
  INIT(Y)=1
□ Z=Z+dt*(DZ_DT)
  INIT(Z)=1
○ A=.25
○ B=2
○ C=4
○ DX_DT=-Y-Z
○ DY_DT=X+(A*Y)
○ DZ_DT=(X*Z)-(C*Z)+B
```

图13.2a 若斯勒方程

电脑屏幕。它们描述了若斯勒方程(图 13.2a)及其相应的计算机模拟流程图(图 13.2b)。模型是通过选择和将图 13.2b 中的图形与麦金托什"定位器"相联接,然后"打开"它们,并指定各种联系间的算术关系而建立的。随着图形被选出和联接,软件便自动产生了图 13.2a 所示的较传统的方程。

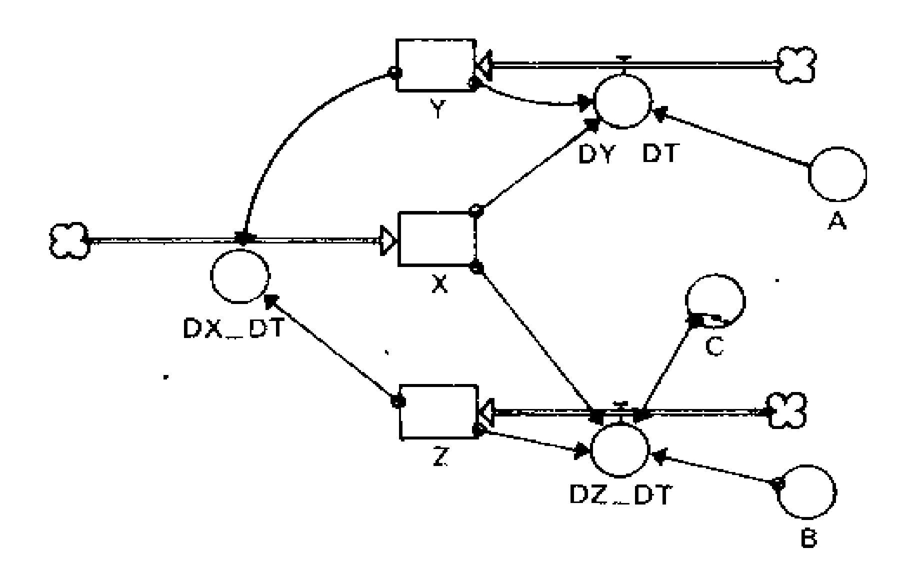


图 13.2b 若斯勒方程的斯特拉演示

图 13.2b 中的矩形表示系统的状态与累积;管状箭头表示累积于系统存量中的流量的储备率;瓶状图形表示系统的时间导数,或表示一个社会系统内居民的决策或行动,图中标有阀门开关之处是用来控制储备流量的;实线表示关于系统状态的信息(即关于在每一存量中已有多少积累的信息)的非储备流量,这些信息结果会反馈回去,对时间导数(在社会系统中指人的决策)产生影响。虽然并未得到显示,但这种信息流量也能累积在存量中,它们代表人们的见解与预期。环状图形被称为变压器(或辅助装置),它表示系统中的常数或某些位置,在那儿信息流量被汇合或转化成更适宜的形式。最

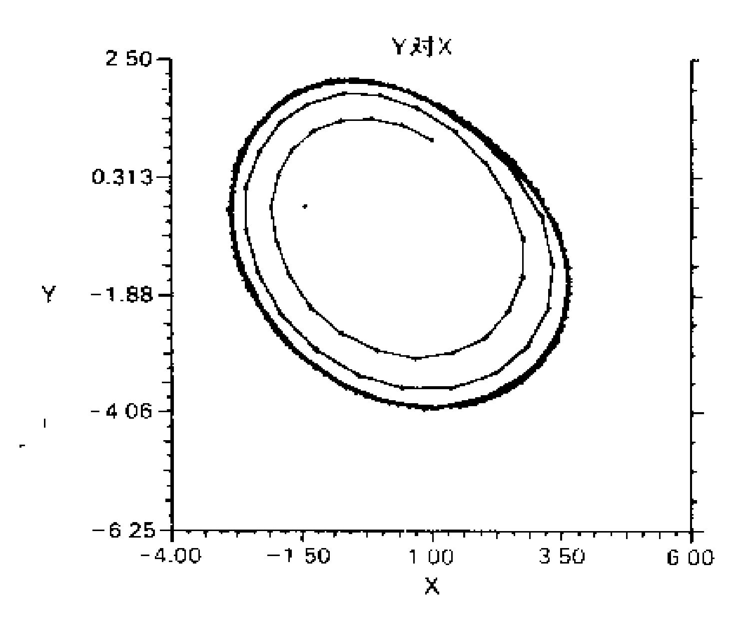


图 13.3b 当 A=0.25 时，若斯勒方程中变量 X 与 Y 的相图——极限环

如果将若斯勒方程中参数 A 的值不断增大，系统将进入倍周期分岔，这将突然改变其动态行为的整个特征。当参数 A 的值为 0.35 时，从图 13.4a 中可以看到变量 Z 的另一时

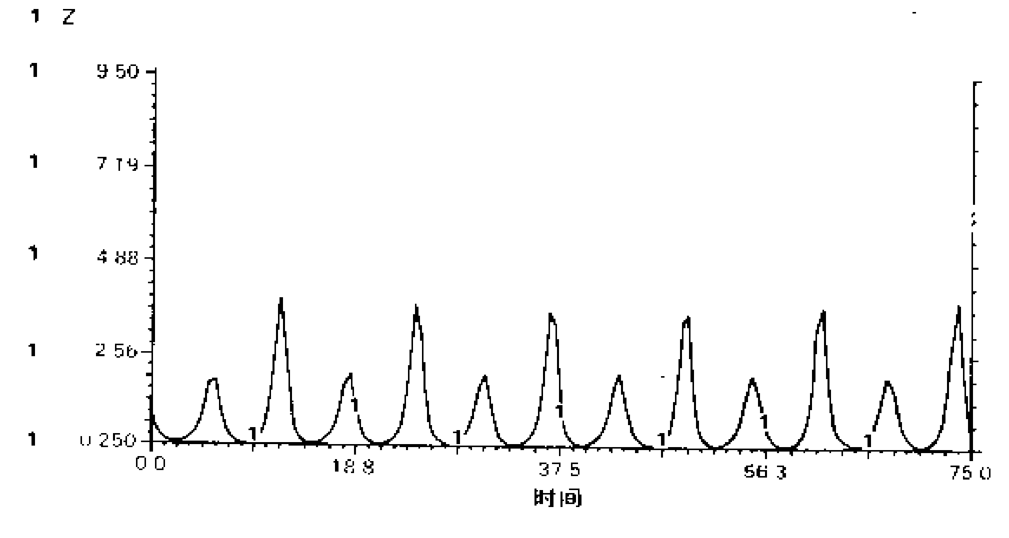


图 13.4a 当 A=0.35 时，若斯勒方程中变量 Z 的时间序列图——周期 2 振荡

间序列曲线图。分析结果表明，正如意料之中的那样，参数的变化促使系统进入周期 2 振荡——这种行为的性质比它以前的极限环更加复杂。与该种新行为相关的吸引子是一个双重闭合环几何结构，如图 13.4b 所示。如果把方程组中三个状态变量视为校园中行进乐队的队员，那么转变成双重闭合环吸引子就犹如乐队成员突然打破了原有的队形，散乱在足球场上，形成一个完全不同的更复杂的队形(Day 1983)。

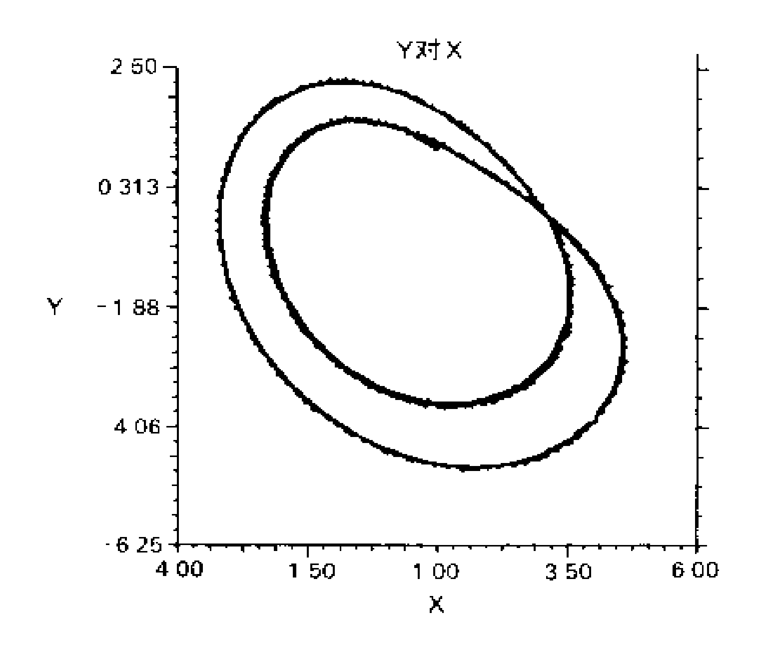


图 13.4b　当 A=0.35 时，若斯勒方程中变量 X 和 Y 的相图——周期 2 振荡

倍周期分岔的出现(以及二次方程最大值的返回映象)表明了若斯勒方程经过费根鲍姆级联而走向混沌。尽管由于受到空间所限，不可能将这个级联的剩余中间过程加以显示，但图 13.5a 和 13.5b 仍可展示若斯勒混沌的一个例子。

图 13.5a 是当参数等于 0.45 时变量 Z 的时间序列图。

有特定频率或次序的高振幅、低振幅及“无振幅”(从时期19至36)的混合摆动构成。实际上，如果图中的数字取决于测定时间序列随机性的检验，那么这种情况将是可行的。

图13.5b是与图13.5a相对应的相图。若斯勒称这种混沌吸引子为“螺旋式混沌”。同其他相图一样，这是将一个三维的几何图形投影到二维空间中，而由于是混沌的，它的动态轨迹永远不会交叉(即永不重复)。然而，重要的是图13.5a中在时间序列展示的随机性中存在一种潜在的有序。换言之，在某种意义上讲随机与有序是共存的。最后必须指出的是，图13.5a与13.5b再次说明，使一个系统跨越其某一临界值时会引起突发的定性行为的改变。

13.4.7 预测的不可能性

在混沌状态下非线性反馈系统的未来长期行为是不可能预测的，这一点很容易用若斯勒方程加以验证。图13.6是一个双重覆盖的时间序列曲线图。第1个时间序列(1Z—初始值—1)为图13.5a所示时间序列的重现。在该模拟过程中，变量Z的初始值为1.000。这里重提此例的目的在于，该时间序列可被视为一个“真实世界系统”的行为。

第2个时间序列(2Z—初始值—1)出自产生(1Z—初始值—1)的同一方程，唯一不同之处是Z的初始值为0.999。因而它可被认为是“真实世界系统”的“模型”，它具有理想的设定结构，理想的估计参数和几乎理想的一系列初始估计值。换言之，在该例子中，“模型”与“真实世界系统”之间的唯一差别是，变量Z的初始值要偏离0.001个单位。

在前9个时期中，当两个时间序列相互覆盖时，我们可以

看到，这一“近乎理想的设定模型”会十分精确地追踪或预测“真实世界系统”。但此后开始出现误差。实际上，当时期达到 85 时，由“模型”生成的时间序列与“真实世界系统”产生的时间序列看上去已大相径庭。进一步来看，如果“真实世界系统”是一个经济体，而时间用天数衡量，那么图 13.6 表明，即使用一个几乎理想的设定模型去预测一个季度后发生的事件也是绝无可能的。

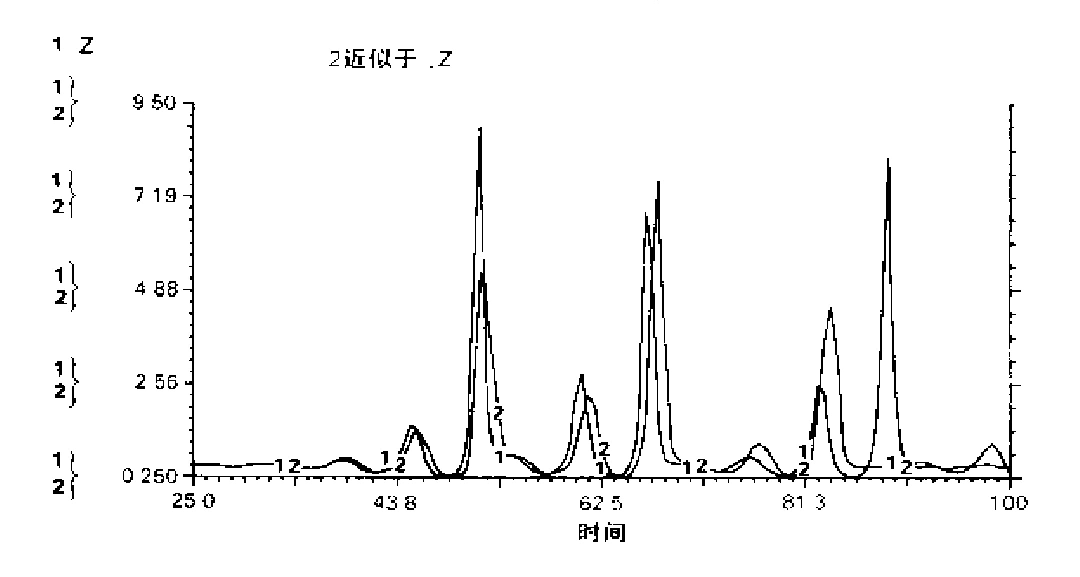


图 13.6　从若斯勒方程中得到的变量 Z 的覆盖时间序列图——初始值分别为 1.000 和 0.999

13.5　演化的悖论

自从索尔斯坦·凡勃仑首次提出了经济学是一门演化科学的论断之后，制度经济学家们便由此为社会经济的分析开辟了演化方法。在这一尝试中颇为有趣的问题是，演化过程的生物学观点与物理学观点迥然不同。根据生物学的观

点(凡勃仑最初的构思),生物系统与社会系统总是向更高水平的复杂性、组织形式和多样性演化。当然,这种观点是以大量的经验证据为依托的。然而,根据物理学的观点(它以热力学第二定律为基础),封闭或"几乎封闭"的系统通过耗用能量,会不断地演变为更大值的熵、无组织及均匀性。由于所有的社会系统都耗用能量,而且依据其边界的定义它们均可被视为封闭或几乎封闭的,因此可认为社会系统也必将演变为不断扩大的无组织状态。

理查德·蔡斯与詹姆斯·斯沃尼两位制度学派学者,使关于社会经济演进实质的两种似乎矛盾的观点取得了一致。他们各自指出,社会制度的演进是依据它与物质世界的多次相互反馈作用的共同演化过程进行的。更确切地说,他们认为随着人们为了获得所需的社会供给而不断转换物质世界中的自然资源,他们既消耗掉高质量的能源储备,又产生出熵和废弃物。同时他们还认识到,如果这一过程得不到有效的控制,必将导致无组织的增加与社会系统的全面崩溃。根据蔡斯和斯沃尼的理论(至少在短期和中期内),人类通过对熵的认识和技术创新,扩大了他们所需的高质能量的供给,并将"负熵"(将熵)带入(带出)系统。他们认为,鉴于需要有更深思熟虑的态度、更复杂的技能与组织以促进新技术的发展与应用,因此社会系统的复杂性、组织和多样性才不断增加。

13.6 自组织系统

自组织系统理论是由诺贝尔奖获得者伊利亚·普里高津、彼得·艾伦(1988),欧文·拉兹洛(1987),埃里希·扬

奇(1980)等人提出的。该理论已成为一种正出现的演化范式的组成部分，它不仅能与蔡斯和斯沃尼的共同演化观点相吻合，而且还适用于协调生物学和物理系统的演化观点。混沌理论主要以热力学开放、耗散和反馈结构的理论为基础。实际上，混沌理论可以被看作自组织理论的一个子集。

根据自组织理论，所有的热力学开放和耗散系统均隶属以下三种形式之一：平衡态系统，接近平衡态的系统和远离平衡态的系统。在每种状态下系统的特征均是由可通过其边界进入到结构内的"负熵"量决定的。

方程1为普里高津的耗散系统的熵产生方程：

$$dS = d_iS + d_eS \tag{1}$$

该方程表明了一个系统中熵的整个变化过程，这些熵是由内部能量退降和社会矛盾缓和过程，以及从周围环境中摄入的负熵组成的。具体来说，第一项 d_iS 表示耗散系统负反馈过程产生的熵，无论系统是开放状态还是封闭状态，该项均为正值；第二项 d_eS 表示通过边界的负熵流，它可以是正值，或在封闭系统中为零。因此，负熵流或者减少系统内部的熵的产生，或者使之保持不变。

当热力学开放、耗散系统处于稳态均衡时，$d_eS = -d_iS$，总的熵产出量 dS 为零。根据自组织理论，这类系统存在于熵的总量最大、均匀而无组织的状态。

当热力学开放、耗散系统接近平衡态时，d_eS 值为正，但小于 d_iS。结果，尽管系统从其外部环境中摄入一些负熵，随着时间的推移系统中熵的净产出仍为正(尽管通常很小)。根据自组织理论，该状态下的系统会趋于平衡态，但由于受到某种约束，这种运动受到阻碍。因而，它们产生最大值的熵、均

匀和无组织，与约束条件相符。

最后一种情况是，当热力学开放、耗散系统处于远离平衡态时，$d_eS < -d_iS$，熵的总产出变为负。这种情况的另一表述方式为：从周围环境中摄入的负熵大于系统内产生的熵。而且，依据自组织理论，系统不会趋于平衡态、熵的最大值、均匀和无组织的状态，而会趋向以日益提高的复杂性和多样化为特征的新结构。换言之，在某种条件下，这类系统会经过分岔自发地重组其结构，形成更复杂的实体。

出现于远离平衡态的耗散结构的自组织归因于决定论因素和随机性因素的相互作用。根据自组织理论，大多数真实的开放系统均围绕其稳定状态波动，原因就在于它们的一些微观因素会出现非平均或随机性的行为，或是由于系统处于非同质的环境中。而且，在某些假设条件下，这些波动会被放大，并通过系统结构内的正反馈环被导入宏观水平。如果这些放大的波动恰好发生在系统"抵抗"其非线性约束时，系统的平衡态将被打破，并跨过临界值到达一个新的、更复杂的组织和行为状态。然而，这些系统超越其临界值后的精确状态和演化路径是不可预测的，因为它们关键要取决于被放大的随机波动和系统对波动产生应变和敏感依赖的特定时点。事实上，正如欧文·拉兹洛所指出的那样，耗散系统的结构仅仅明确了某个分岔后的"可能性与极限"或可能采取的"一组路径"，而没有明确将采取的具体途径或将出现的重组形式。

从上面关于三种耗散系统的描述中显而易见，自组织系统理论与蔡斯和斯沃尼提出的共同演化观点同出一辙。在该理论框架中，物质世界可定义为一个系统，它处于普里高津状

态1或状态2(这取决于边界划在哪儿,以及怎样看待日夜射向地球的太阳辐射流量),而社会系统可归纳为处于普里高津状态了。然而,自组织系统理论还可以用来解释系统将以何种方式呈现出不稳定性并超越分岔点。

13.6.1 图解:一个社会演化的简单模型

尽管如图13.3a至13.5b所示,分岔序列导致若斯勒混沌现象的产生是自组织转变的一个例子,但它并没有真正抓住伊利亚·普里高津等人关于远离平衡态的耗散系统研究之精华所在。这是因为自组织的转变通过人为地改变参数A而发生在各个不同的模拟过程中,而不是在一个特定的模拟过程中通过系统自发的内生变化而得以实现的。另外,虽然若斯勒的方程组展示了随机行为,但并不包含反映微观因素的非平均行为在系统内的波动。

因此,阐明自组织系统理论的更好方法是明确为之设计的一种模型。图13.7正是这样一个模型。最初它是由埃里克·莫斯科尔德、斯蒂恩·拉斯马森和托本·瑟伦森(1983)三人建立的,旨在获得导致社会系统"演化"的某些过程,并表明自组织过程如何在系统动态范式中反映出来。然而,出于本文的目的,我们对此进行了简化(模型中竞争的政治团体数从原有的3个降到2个),并增加了一个"黄油加大炮"部分来帮助阐明系统的某些特征。

图13.7是简化的社会演化模型流程图。从图中可以看到,模型描绘了拥有两个主要政党的社会:鹰派与鸽派,以及一个被称为"骑墙派"的对政治漠不关心者的团体。在任何时点上,社会人口的政治构成——鹰派人数与鸽派人数之比(以

模型的基本假设为：随着时间的推移，骑墙派将加入两个竞争党派之一。假设存在三种会导致这种转化的因素。第一种是正常的转换率，表示“正常”状态下骑墙派中每个月加入两个政党之一的那个小部分。第二种是源于计算机的随机数字发生器的随机影响，这些干扰反映了骑墙派中少数个人的非正常和不可预知(关于他们加入哪个党派)的政治行为。最后一种因素是，在任何特定时间内出现的社会压力，它表明某种既非鹰派也非鸽派的因素(诸如新技术的引进、他国的行动以及国内经济竞争等)强加于社会的一种压力。如图所示，只有当超过社会压力的界限值时，该因素才会对模型产生明显的作用。

最后值得一提的是，模型还存在一种鹰派与鸽派变回骑墙派的状况。标有鹰派的背叛者和鸽派的背叛者的管状图形表明，一些人在与两个党派之一接触一段时间后开始醒悟，并转而在政见上持中立态度。这也表明了系统内产生熵的释放过程。

图 13.8a 和 13.8b 分别为时间序列图，表明了模型的模拟结果。更确切地讲，图 13.8a 描述了在模拟过程的 48 个月份的各点上鹰派、鸽派、骑墙派和社会压力的数量；图 13.8b 表示同期内黄油与大炮的耗用数量。两个图形均大约在第 11 个月与第 18 个月份点上被垂直分割为三个时期，每个时期代表了社会演化的独特阶段。

为了充分描述系统围绕其稳定状态波动的观点，预置模型于均衡状态(鸽派 15 人，鹰派 15 人，每月用于军事项目的费用为 50,000 美元，每月用于社会计划的费用为 50,000 美元)，而此时骑墙派转换率的参数值会受到噪声干扰。另外，

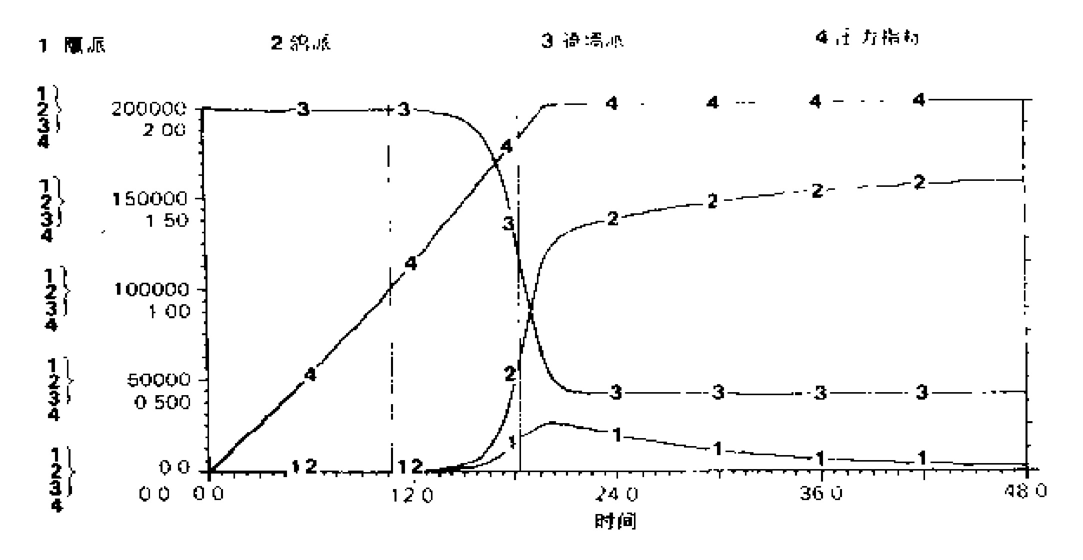


图 13.8a 与鹰派平均联系时间为 2 个月的时间序列图

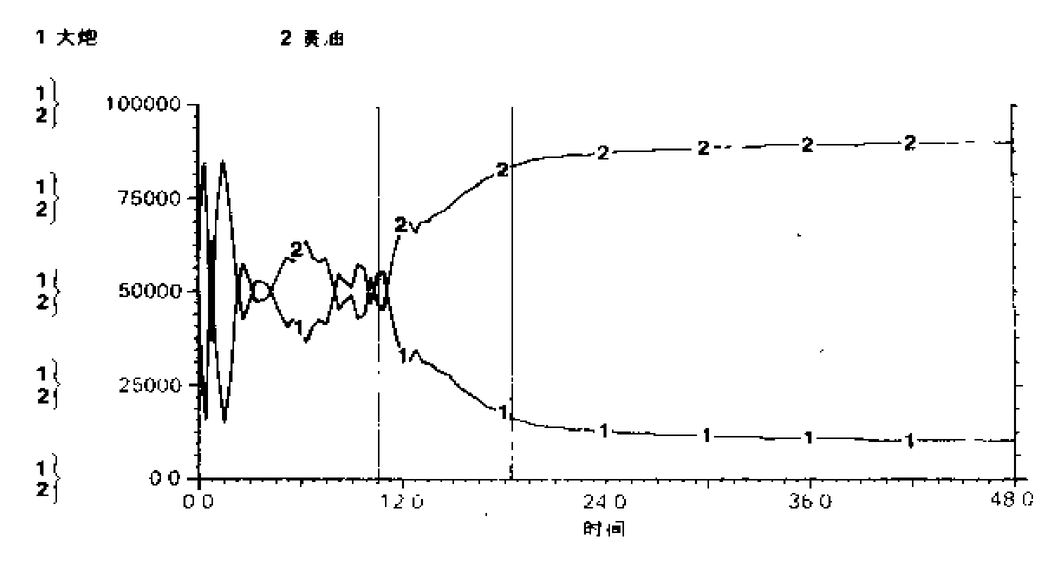


图 13.8b 与鹰派平均交往时间为 2 个月的黄油与大炮耗用状态的时间序列图

为了打乱这种稳定状态，使模型的正反馈环扩大噪声，并导致系统进行自组织，我们规定社会压力的临界值为 1，而社会压力的实际值定为 0，并指定会迅速上升到 2。

图 13.8a 和 13.8b 显示，社会演化的第一个明显时期，出现在社会压力实际水平低于它的临界值的那一段时间（约从 0 到 11）里。在该时期中，模型围绕稳定状态的均衡点上下波动，社会中的国家预算在黄油与大炮之间的分配完全取决于计算机产生的特定随机数序列。这些波动表明了对政党的附加部分（即对各政党的力量和"赢得"国家大部分预算能力的增加），它取决于少数个人的随机政治行为。如果消除噪声，系统围绕稳定状态的波动也随即消失，国家预算将在两党之间平均分配。

模型演化的第二个明显时期大约出现在第 11 个月至第 18 个月期间。在该时段上，系统内的社会压力突破了社会的界限值，结果模型的稳态行为也随之发生了动摇。在此状态下，模型对参数的细小波动极其敏感，而其正反馈过程开始放大波动并使之达到宏观水准。尽管在图 13.7 的流程图中不可能观测到，但模型基本的正反馈过程描述了吸收新鹰派与鸽派成员的随波效应：鹰（鸽）派人数越多，新的鹰（鸽）派成员也将越多。这种自我强化的行为可以清晰地从图 13.8a 中看到：在该时期中，两派的数量均以指数形式增长。这表明了在出现不稳定性的时期中，两个政党通过迅速招募追随者来争夺社会控制权的斗争。

大约从第 18 个月至第 48 个月为模型演化行为的最后一个时期。在该时期中，源于有限人数的系统的非线性约束使系统转变为受其负环支配，结果，第二个时期中的斗争由此告终，系统进入自组织"演化"。如图 13.8a 所示，在这一具体模拟过程中，鸽派压倒了鹰派，获得对社会的控制权。事实上，到第 48 个月时鹰派成员几乎已荡然无存了。与此对应的是，

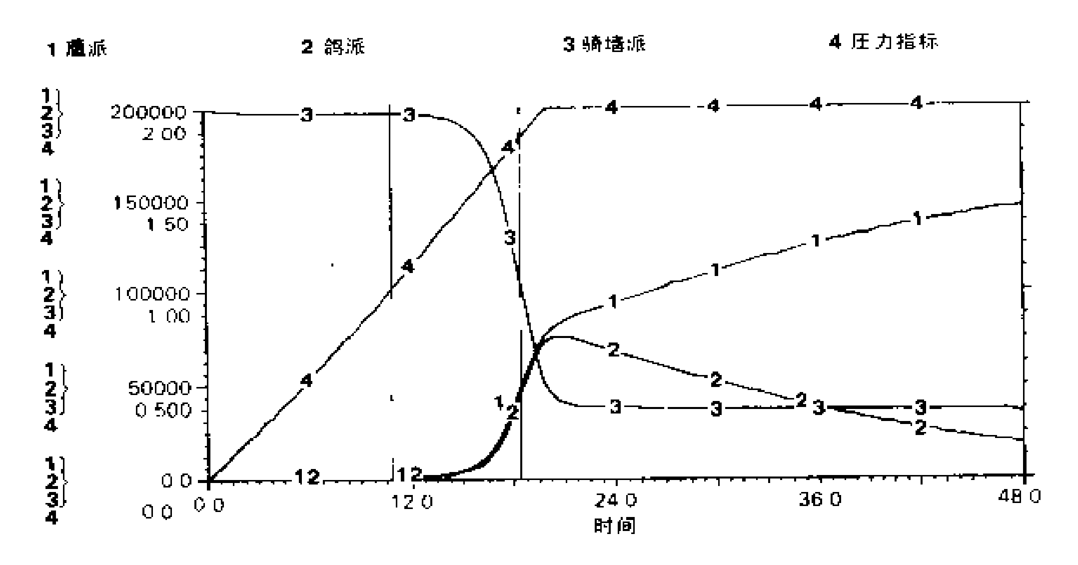


图 13.9a　当鹰派平均交往时间为 3 个月时的时间序列图

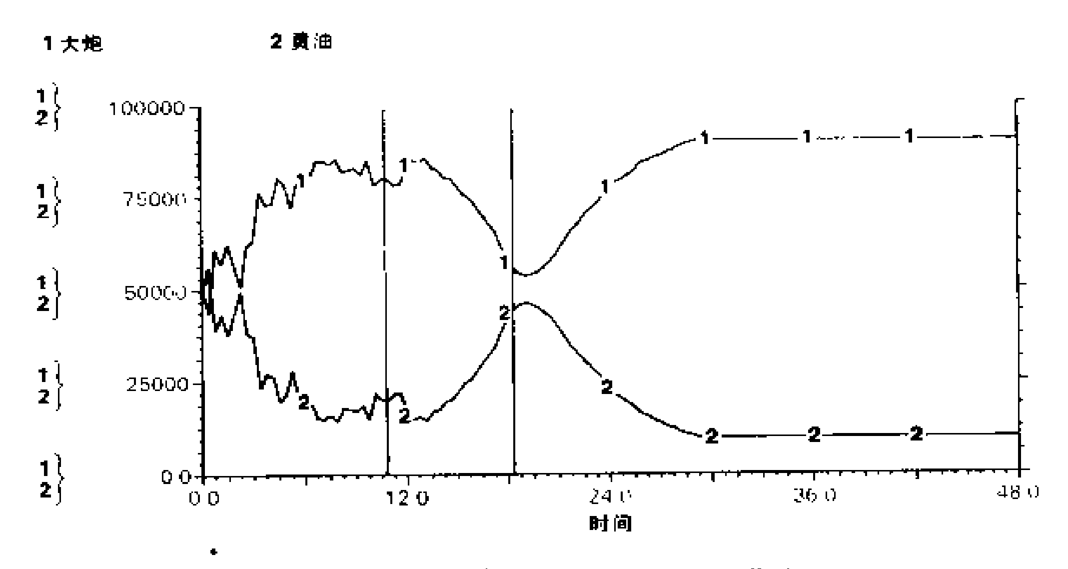


图 13.9b　当鹰派交往时间为 3 个月时，黄油与大炮使用的时间序列图

社会的国家预算中约 80% 最终用于社会规划。这种新的社会经济状况的划分可以从图 13.8b中看到。一目了然的是，社会经历了从鹰派与鸽派的(大致)势均力敌演变为由鸽派一

瑟伦森的随机重新因果化方法，必须给计算机输入如下一些指令：（1）随机地在模型的子系统之间建立或分割信息链，以形成新的封闭环和潜在的超循环结构；（2）按照某种标准评估每个新的潜在超循环结构的运行；（3）稳定和增强以标准形式运行"良好"的那些超循环结构。因此，这种技术把随机行为的因素与达尔文的自然选择原理融为一体。因而，模型将选择的使之趋于稳定的具体超循环，以及将出现的具体自组织形式总是不可预测的。即使该技术遵循拉兹洛演化理论中概括的一般原则，情况也是如此。

13.7 未来的制度动力学模型

从本文关于混沌和自组织系统的论述中可以发现，存在两种指导制度经济学家的未来建模尝试的一般原理。第一，未来的演化模型必须分解成微观单位或子系统，其宏观或总体系统行为取决于微观单位间信息链的建立或消除。第二个原则是，未来的演化模型的结构必需由决定论和随机性因素混合构成，这样它们才能模拟与实际社会系统相联系的稳定与结构变化时期的交替。

彼得·M·艾伦和J·M·麦格莱德提出的关于新斯科舍[①]渔民的捕鱼行为便是包含这样两个原理的模型的一个很好的例子。该模型包含由各艘渔船组成的一个船队（代表微观分解原理），他们被划分为两组，"笛卡尔号"和"随机号"（表示决定论和随机性因素相互关联的原理）。笛卡尔号船长在

① 原文是Nova Scotia，加拿大北部滨海省份之一，以捕鱼业著称。——译者

模型中是一个以“理性”行动的人。在模拟过程中，这意味着该船将去“最有可能”产鱼的地点捕捞。笛卡尔号船长是通过评估他们能获得的关于“最佳”捕鱼地点的所有信息，包括通过监听其他渔民的无线电广播所获得的信息，来确定这些地点的。另一方面，随机号船长是一位冒险家，他们捕鱼所遵循的标准不是关于“最有可能”场所的情报；因此，他们能发现所有具备捕捞条件的新场所。

颇为有趣的是，艾伦和麦格莱德运用该模型验证了当所有的船长均是笛卡尔号类型时取得成功的可能性，然后再验证船长均为随机号类型时的情况。在前一试验中，他们发现所有的船均固定在第一个“最有可能”的捕捞地点，并将鱼捕尽——尽管周围的海洋中有鱼存在。在第二种状况下，他们发现整个船队将是徒劳的，因为即使所有的船都知道该地点是“最有可能”捕到鱼的场所，但却无人问津。当然，艾伦和麦格莱德断言，笛卡尔号船长与随机号船长的混合对于模型模拟新斯科舍渔民的实际捕鱼行为是必要的。

如果将该思路拓展到制度经济学范畴，不难想象，未来的制度动力学模型将描述在无噪声和能产生混沌的结构中的工具赋值与社会冲突的演化过程(或结果)。事实上，克拉奇菲尔德和他的同事认为，混沌不仅能根据其限制的事物来看待，而且还可以通过它可能提供的事物去观察：

混沌通常是以其隐含的限制性来被看待的，如缺乏可预测性等。然而，自然界可以建设性地利用混沌。混沌通过对微观波动的放大，提供给自然系统新奇的东西。一个正在逃脱食肉动物进攻的被捕食者，可以按混沌的路径飞行以出人意料地逃脱追捕……即使是理性进步的过程，同样也要依赖

注入新的观念或以新的方式与旧观念发生联系。与生俱来的创造力也具有一种潜在的混沌过程，它通过有选择地将细小的波动放大来形成诸如思想这样的宏观连续性心理状态。在某些状况下，思想会成为一种决策或某种自由意志的行为。根据该论断，混沌为自由意志行为(的建模)提供了一种机制，……(并且)是决定论的。

13.8 结论

一个制度动力学模型恰如一个完美的“心理模型”。换句话说，一个制度动力学模型的源代码必须包括影响(或可能影响)研究中的系统，以及界定(或可能界定)其问题的所有相互关联的因素，无论这些因素或问题是存在于过去、现在还是未来。作出这种防止误解的说明以后，从本文所表述的观点中可以十分清楚地了解到，诸如随机重新因果化的方法和对混沌理论与自组织系统理论探究的结果等，这些都能够加入到制度经济理论中以建立模型；从这些模型中会得到对社会演化动态的洞悉，而且它们能在不断完善社会经济政策的过程中扮演试验室或“微观世界”的角色。98年前，查尔斯·桑德斯·皮尔斯的一段话似乎暗示着他正在设想这样一个模型——它描述了随机与决定论因素之间在结构上相互联系的自组织过程：

> 你们都听说过能量的耗散。在所有的能量转换过程中，一部分能量转变为热量，而热量总倾向于使其温度均等化。结果，根据必然法则的原理，宇宙中

的能量将逐渐趋于消亡，不存在任何力，相同的热量与温度漫布于所有空间……但是，尽管没有任何力抵销这种趋势，但也可能出现相反的结果。在长期过程中力也是耗散的，而且可能性比较集中。根据自然法则的原理，能量的耗散总是伴随着越来越有可能重新聚集能量的环境。因此，必然存在两种趋势得到平衡的一点，并且毫无疑问，这就是现存的整个宇宙的实际状态。

张宇燕　张支南

译自1990年3月《经济问题杂志》

14 经济现象的复杂性：对丁伯根的回答及其他

库尔特·多弗尔*

甚至具有大胆冒险的精神及良好直觉的学者，在解释事实中也会遇到哲学偏见的阻碍。这种偏见……存在于这样一种信念中：在没有自由构建概念的情况下，事实本身也能产生科学知识。

——A·爱因斯坦，1949年

因果关系的法则决不是人类思维过程中的一个必要的因素这一点一旦被确定，我们就可以净化思想来探讨它在现实世界中的有效性问题。

——M·普朗克，1932年

---

* 库尔特·多弗尔(Kurt Dopfer)，瑞士圣加仑大学经济学教授。——译者

14.1 探求先入之见

由于扬·丁伯根教授明确地解释了他的经济研究方法，从而使我们最近一直在进行的讨论得以继续。他透彻鲜明的论述极大地促进了对话的进行。

他以一种挑战式的口吻开始了他的论述。他宣称：他希望“有目的地避免力学的主题而只讨论经济学：我不想在这两种科学之间提出一种先验的联系”。(1991)如果这就是丁伯根教授唯一关心的科学问题，那么我们之间是不存在异议的。的确，在经典力学与经济学之间是不存在一种先验的联系的。事实上，我一直认为不仅不存在这样一种先验的联系，而且我们实际上应将之从经济研究的领域中——在那里是假定这种联系存在的——清除出去。我一直认为任何科学肯定要依赖先入之见(preconception)，经济学的两个主要的先入之见是经典力学和带有进化方法的生命系统。在先入之见和经济理论之间可能存在着一种必要的联系，但在力学的先入之见和经济学之间不存在任何必要的联系。

丁伯根用假设存在着能使我们进入“事物本质”的宏观科学方法为其不可知论的观点进行辩护。既然一个科学的观测者发现其自身先验地处在一个安全的本体论和认识论的立场上，则他或她就无需为证明这种本体-认识论立场而去探求先入之见了。这种观点的问题是：客观现实性本身是需要证明的一个先入之见。丁伯根提出，存在着一种先验的实体方案，它允许人们把经济现象分类为具有突出的定量(quantitative)特征和突出的定性(qualitative)特征的两种现象。在分析中

强调经济现象的定性方面的经济学家们将满意于这种调和的姿态。当作为一个经济学家的哈姆雷特①在深思"经济学的含义"而询问"定量还是不定量"时，他会得到肯定的忠告。这样一种分类方案的问题在于它必然依赖于一个实体的先入之见——现象是由什么构成的。我们不能把关于这一点的具体论述悄悄地略去，而必须在对"经济研究的功能"（丁伯根的论文题目——译者）一文进行讨论之前就将之澄清。将一个实体的基本原理放在第一位来阐述的逻辑陷阱，将导致关于构成"质"（quality）和"量"（quantity）的是什么的错误概念。因此，我建议从考虑"现象"是由什么构成的出发——即使这在传统的经济学家们看来是"哲学上的"或不属于经济学讨论的范畴。我将试图回答以下问题：①是什么构成了一个现象？②从现象的构成中导出的"质"和"量"的概念是什么？③从经济理论角度，我们从①和②中可得出什么结论？

我主要的具体前提是：任何现象或事件都是由物能（matter-energy）和理念（idea）构成的。不存在任何一种由物能或理念单独构成的现象。从进化的观点看，理念代表潜能（potentials），物能代表潜能的实现（actualization）；物能具体地标明了时间和空间，而理念是没有时间和空间的；物能是可观测的，理念则不然。因而，任何现象由一个可观测的方面和一个"内部"方面所构成，其中"内部"方面指代表着物能的创造性潜能的无形理念。我们可以称物能方面为一个现象

① 哈姆雷特（Hamlet）是莎士比亚的著名悲剧《哈姆雷特》的主人公，他深深地处于恋母情结与复仇心理的矛盾之中（因为他的母亲嫁给了弑兄篡位的叔叔）。在剧中，他曾痛苦地自白："生存还是死亡？"本文作者借用这段著名句式，是为了表达在现今经济学分析中是选择定量分析还是选择定性分析的两难境地。——译者

的"表面"(surface)，与理念有关的方面被表示为构成"现象学核心"(phenomenological core)的某一"内部"特征。这个概念听起来哲学味儿很浓，它涉及到两个基本实际问题：第一个问题是为什么存在现象的一个整体，为什么整体大于局部之和。这个问题可能要归因于在现象学核心中经过具体调节后的有序要素；第二个问题陈述了在时间中作为事件的现象可能是对称的或不对称的这样一种观念；一定存在着一个能够对该观点进行解释的基本原理。人们不能仅仅由对现象的表面行为进行观察就得出关于(不)可重复性的具体原因。

从这个先入之见出发，可导出"质"与"量"的概念。这些概念既指现象的表面也指其现象学的核心。表面具有在时空中可观察的外延这一特征使之适合于定量分析。实际上，这正是经验观测和统计的范畴。经验测量既适合于经济现象的空间方面也适合于时间方面。现象的表面具有可用质的概念来描述的类似特点。例如，一个现象可能是蓝色的或红色的，或者具有在我们看来是属于一个定性性质的特征。虽然定量的可评估特征与定性的可评估特征之间的差异是很重要的，但我们可以认为，任何表面的"质"的特征均可被转换成相应的量的特征。例如，颜色或音调可用它们各自的频率来表示。虽然一片美丽的水晶或雪花可依据结构的定性标准来分类，但该结构也可以数值表示。这种从质到量的转换在一个具体例子中是否是有意义的还未确定，我们所能确定的是，现象表面的这样一种转换是完全可能的。

适用于现象学核心的质的概念则是相当混乱的。这一质的概念并非指在时空中扩展的物能，而是指理念的一个不可

现象的运行方式及其含义。解释是一种甚至不能用最精细的描述来替代的真正的理论工作。正是由于这个原因，许多异端经济学家们深信：演化研究和制度研究在未来是极有发展前途的。

14.2 传统的因果关系：计量经济学的某些结论

我们现在转向丁伯根的经济学、计量经济学及其（可能出现的）现代主义-实证主义的方法论基础。全面的计量经济学论述通常由两部分构成：一部分是模型；另一部分是结构。无论是模型还是结构均指经济现象的表面。模型以一种形式化方式描述了表面的一般特征；结构提供了计量经济学论述的数值。前者通常由一个联立方程组构成，它构成了现象表面的质；后者则是定量特征。模型是一般性的，数值是时-空特定的。计量经济学家可能反对这种区分，认为模型总是依赖于一个经济理论的，因而包含着真正的定性论述，所以模型阐明了经济现象的内部特征。即使这一切为人们所承认，也并不意味着计量经济学本身对经济现象作出了定性的论述。相反，这表明计量经济学采用了这种定性的论述。

当计量经济学家们对方法论展开一般性讨论时，问题就变得明显起来，因为只有明确地认识了经济现象的“内在性质”(inner quality)，才能对方法论作出正确的评价。正是在这一点上，先人之见必须被引人经济学讨论之中，而计量经济学家们不打算“争论”的也正是这一点。有两条可想到的途径使计量经济学家们由之得出定性的论述。第一条途径是隐含假设。他们心照不宣地假定：作为模型基础的理论将为现象

的内在性质提供一个正确的辩护。这样一种先验假设可能源于一种尚未被打破的对理论研究(大部分是在计量经济学以外完成的)的信任。对模型定性解释的另一条不同的“隐含途径”依赖于从其数值表面得到的信息。这种观点是建立在数值结构自身将显示出经济现象的内质这样一种信条之上的。数值结构被认为是一种波普意义上的假说,可以通过检验依据假说所作出的预测结果来逐渐完善假说。模型数值结构的变化被假定会相应改变模型的“含义”及其隐含的定性假设。人们一直认为,该途径在涉及结构转换、制度变化、以及现实经济生活中其他定性的不可测性等问题时存在着方法论上的缺陷。这一谬误存在于这样一种假设:“事物的本质”会对称地反映在现象的数值结构内。然而,如我们已经认识到的,理念和物能两者构成了一个经济现象。因此,描述始终必定要由真正的解释来补充,但它也许从来不是一种镜子式描述的分支。

处理方法论问题的第二个和更为重要的方式是认识经济现象的真正性质(genuine quality)。虽然丁伯根教授(1991)并未介绍表面的质与现象内核的质之间的区别,但他通过指出原因概念(concept of cause)的重要性而认识到了后者意义上的质:

> 对于科学研究起决定性作用的是原因概念。如果 P 的存在或变化总是发生在 P_1 的存在或变化之后的话,那么现象 P_1 是现象 P 的一个原因。这个变化可能是质变(性质的变化),也可能是量变(规模的变化)。如果在 $P_1, P_2, \cdots, P_n, \cdots, P_N$ 存在或变化之

后，P的存在或变化才发生，则P具有几个原因。

一门科学是某些现象中因果联系的集合。

这个论述阐明了他所应用的因果关系原则的本质。我们可以从听起来是不言而喻的论述——"如果P的存在或变化总是发生在P_1的存在或变化之后的话，那么现象P_1是现象P的一个原因。"——中找出使人们"证明"该论述属于古典的或机械的因果关系原则的主要证据。这里的关键在于"总是"这个词。这个论述的一般结构如下：每当我们知道初始条件时，我们就可以应用一个定律，使我们能决定论地预测一条轨迹的路径和终极状态。原因可能是定性的（不仅是定量的），而且在那种轨迹的决定中可能有不止一个原因。但在不考虑具体特征的条件下，人们总是以决定论的措词来考察经济结果。

虽然关于机械的因果关系原则的讨论可能是属于科学哲学的一部分，但对于经济学来说，其含义是相当重要的。首先，从对"重要变量"（significant varibles）的选择上可推断出它隐含着一个现象的整体的概念。前面提及的古典因果关系原则的关键问题是它缺乏一个全面的视角。例如，如果我们考虑这样一个模型，在那里，没有政府活动的封闭经济中的资源流量被表达成两个线性方程：

$$C=a_0+a_1Y$$

$$I=b_0+b_1Y$$

其中$Y=C+I$，I和C分别代表着投资与消费，国民收入Y由两个"因果决定因素"，即C和I来定义。在对该方程系统的"内在性质"进行定性评价时，我们发现它们中的每一个都代表了一种独立的因果体系。每一个方程都能被分别解出；

可以很容易地了解到，经济现象的复杂性远远超过了一个苹果或一辆汽车的复杂性。无论古典的因果关系原则还是简单的生物学隐喻，都不能满足作为一种必要的先入之见的需要，即对经济现象的内在性质或组成原则提出有意义的阐述。带着头脑中的这些先入之见的结论，我们现在转向对一个新的经济动态分支理论的讨论。

14.3 混沌理论的降临：经济动态的一个怪蛋

如果P_1存在，则P总是发生于X中的这种论述一直受到非线性动力学的挑战。这种"新"动力学依据一个以综合性、有限、离散、叠代为特征的规则系统来操作。运用这个规则系统，人们可得出：在特定的初始条件下，非线性产生出无法预言的行为。它不再满足于只要了解初始条件，就总能得到——在一个无穷重复的世界中——相同的轨迹和最终结果这种判断。从逻辑的必要性角度看，此处被重复的——在开头强调这些模型的决定论本质——是未知的结果、不可测预性及不可逆性。

亨利·庞加莱，上个世纪该领域中的带头人，为我们提供了一幅有趣和形象的画面来证实非线性动态系统所表现出的规则的、可预测的行为或不规则的、不可预测的行为。一个系统的运动被定义为一个抽象空间内离散点的一条轨迹。庞加莱形象地提出，将一张纸置于该空间，于是系统的轨迹将不时地穿过该纸(此处纸代表一个平面——译者)，例如，它在某一时刻处于一点 P(在纸上)。P已知后，问题是轨迹下一次穿过该纸的点 P' 的位置在何处。如果对于穿过该纸的所有点，

我们都知道 $P \to P'$ 的关系，那么我们就能知道轨迹穿过该纸的位置。例如，我们可以了解是否某些关系是自我重复的，或者是否穿过该纸的点“没有特定结构”，因而会产生一个不规则事件的演化模式。我们对轨迹的“时间结构”（重复性与非重复性）的感兴趣之处，在于它的形态而非其（仅仅从复杂的微分方程中导出的）全部路径。

函数关系 $P \to P'$ 可写成一个 $x_{n+1} = f(x_n)$ 形式的方程。制度经济学家们大概认出了这是他们所熟悉的循环因果关系（circular causation）式，时间 t 上的 x 诱发时间 $t+1$ 上的 x，后者再诱发 $t+2$ 上的 x，如此不断循环下去。我们如何能将全部轨迹的解析图——诸如一个经济过程——公式化呢？第一个回答是：只要不断地计算描绘循环因果关系的方程数值就可以了。在应用古典的因果关系原则时，循环因果关系由两个线性方程构成。当系统呈指数化增长时，单个的原因是线性的，轨迹的形态特征来源于这两个相互联系的原因连续地增加。因为在函数形式中没有设立界限，故这一过程是无穷无尽的。相反，庞加莱的截面是有限的，它可用数学形式表示为 0 到 1 之间的一个（有限的）实数区间。由于只有“有限的空间”，人们才能在已知的约束条件内选择一种函数形式来刻画轨迹的演化。由此得出：线性方程不能服务于该目的，因为它们是单调的，不久就会离开限定好的“空间”，游走到“无限”之中。因此，一条轨迹或一个模型的质的解析图只有用非线性函数才能恰当地表达出来。

美妙之处在于，新的非线性动力学仅需要非常简单的形式来证实其有效性。我们可以选择一个非线性函数的最简单的抛物线形式来显示其全部的、丰富多彩的行为后果。一条

的整体范围内进行解释，则它可能是一个有用的工具。只有此时，在统计数据范围内，一个线性关系的质的含义才能为人们理解和接受。用计量经济学的语言来说就是，一个模型的行为本质可以因其结构的数值差异而发生深刻的变化。

在20世纪80年代，人们对数学领域中的拓扑学的兴趣不断增加。我们有可能证实下面的结果：在“适当的”有限庞加莱映象的假设和最简单非线性方程的叠代的条件下，不仅“有序的”（规则的、重复的），而且“混沌的”（不规则的、非重复的）轨迹都能被得出。混沌理论不仅对新的“表面性质”，就是对世界观也产生了巨大影响。不仅混沌理论被看作为一种有力的数学工具，而且混沌概念本身也成为一种描述复杂世界的令人信服的比喻，这种复杂的世界经常以无序的形象将其自身展现在我们面前。具有混沌特征的非线性分析一直盛行于诸如生物物理学、生物学、气象学及神经生理学等经验领域内。经济学对混沌理论的兴趣也在不断增加。我们正在目睹一个经济学新范式的“起飞”吗？非线性动力学是改写经济科学的基本章节的最有前途的方式吗？

---

① 因为对所提出的非线性模型的普适性而言，倍周期是极为重要的，故下面所引的迈克尔·费根鲍姆的论述可能是有用的：

“对于某些范围的参数值，系统展示出一种有序的周期行为，即系统的行为在时间T的每一个周期中进行自我复制。在此范围之外，在T以后的第二个时间系统行为就不能自我复制了；它几乎完全如此，但事实上，它需要T的两倍区间来自我复制，即周期倍增到2T。这个新的周期性保持于某些参数值的范围内，直至另一个关键的参数值出现为止。这时，系统的行为在2T以后的新参数值上也几乎是自我复制的，但实际上，现在系统复制所需的周期是4T了。这种相继的倍周期过程连续地递归（当n增加时，周期为$2^n T$的参数值范围不断地变小），直至某一参数值为止，它倍增为无穷，系统的行为不再具有周期性。倍周期是系统遵循从简单周期运动到复杂周期运动……的一条独特的路径。在到达非周期行为极限之前，经历了倍周期的所有系统存在着一个唯一的、因而是普适的通解。”

有两个原因可能会打击这种新希望。第一个原因涉及与经济学中的混沌相关的经验证据，它指经济现象的表面。第二个指隐藏于经济现象之下的“因果关系原则”，并引起对下面这点的极大关注，即作为重建经济学的一种新规范方案的混沌理论的有效性。

对混沌理论的未来作用产生疑问的第一个原因并非批判性的，但也不是对其进一步研究的鼓励。现在有相当大的一批学者从事寻找经济学中的混沌的经验研究。这种经验寻找主要散布于运用GNP数据和谱分析的商业周期领域，GNP和工业生产中的价格运动领域，及金融市场和股市价格等领域。一项走在前列的工作是最近由纽约大学的经济学家们完成的，他们运用了物理学中提出的统计检验方法重复并检验了他人的工作。“他们的检验标准……纽约大学的‘绞肉机’将几个企图找出混沌的研究报告……抛进了垃圾堆。”

混沌理论不能提供一种经济学新范式的第二个原因与经济学解释方面的局限性有关。用来解释经济现象本质的概念原则仍依赖于那些十分类似经典力学的特征，如表面分析、决定论、预测的方法论上的倾向性。非线性动力学显示了在新的规则系统条件下，数值中无限小的差异或变化如何决定论地产生系统的一个动态的“历史”；如果构成推测结果的这两种“历史”被看作是两种不同的质，那么我们可以说量决定了质。显然，这种解释与我们前面发现的关于不能从量中归纳出质的论述并不矛盾，因为一个非线性模型仅在被约束于表面分析的描述域内才起作用。所以，在这种新规则系统中，不可逆性和不可测定性并不能得到充分的解释，而仅能被描述。就非线性模型更好地描述了经济现象的实际表面

这一点而言，它的确是一种更佳的描述，但并非一种更佳的解释，因为它完全不是一种解释。当讨论到它对经济政策的重要作用时，我将对此进一步详细说明。首先，我将讨论演化的先入之见问题，然后探讨可能综合于一个演化经济学中的新非线性动力学的科学潜力。

14.4 演化经济学的原理

我们从一个潜能在时空中得以实现则该现象存在这一具体的命题出发，区别结构潜能(structural potential)和过程潜能(process potential)。结构潜能促成结构的出现，过程潜能促成过程的出现。

构成结构潜能的特征是：

(1) 现象发生关联的倾向，

(2) 序参量(order parameters)出现于现象以一个整体结构彼此发生关联的过程中；作为更有序整体中的部分，现象获得了一种新性质。

我们可赋予有序和混沌的概念一个同步(synchronic)的含义。如果一类具有关联倾向的现象彼此是非关联的或其结构潜能不具有关联倾向，则存在混沌。因此，混沌是一种未实现的结构潜能。孤立的、不关联的经济现象就是混沌。无论其表面是否具有规则性均与混沌的性质无关。如果结构潜能得以实现，则我们称之为有序。在有序状态中，现象是关联的，其性质由依赖于实现过程的一个时空来定义，该实现过程涉及到初始时孤立的现象的结构潜能。

过程潜能由一个系统的局部衍生出来。例如，在一个自然

进化过程中，突变仅发生于单个有机体内。或者，诸如发明这类的新奇想法也起源于个人思维，虽然一家厂商的特定环境可能有助于这一过程。就一个"主观主义的"概念，即过程潜能源于经济活动主体的创造力而言，相信过程潜能是衍生的这种观点似乎适合于经济学。除了能恰当地构成经济活动主体的创造力的经济秩序之外，不存在任何"具有创造性的厂商"。

14.5 结构的出现

一门社会科学，如经济学，是通过回答为什么个人彼此以某种方式相关联这个核心问题而得出其经济学含义的。图 14.1a 显示出一系列孤立的现象，如一些没有任何相互联系的个体。大多数经济学家都同意：如果个体被置于非关联的境地，那么对于经济系统而言，这实在是一种蹩脚的理论描述。因此，方法论上的个人主义或主观主义从来不能被解释成经济活动主体不以某种方式发生关联的意思。因此，我认为，经济活动主体具有一种关联倾向，比如参与交易、交换及各种形式的合作。图 14.1a 中的每一个圆圈表示一个经济活动主体，它带有表示关联倾向的箭头。单个经济活动主体仍是不关联的；箭头指向任意的方向——这种任意的方向是就一个有序的整体而言。阴影圆表示一个潜在地开始关联过程的经济活动主体。在图 14.1a 中，系统的初始状态是属于混沌的，因为部分(parts)之间是不关联的。正在出现关联倾向的经济活动主体是一个增加有序的变化的主体。(当然，可以存在许多个潜在的变化主体，直至主体的总数。)这个变化的经济活动主体(实心圆)通过运用或实现主体的结构潜能衍生

出有序。这一特殊的主体引入了一个序参量。

图 14.1b 显示了正在形成某种结构的个体自身衍生出一个序参量时的状态(箭头朝着内圆的线),以及当这个序参量影响不同成员(箭头从中心朝向外圆的虚线)的行为时的运行情况。应注意的是,虽然经济活动主体X(实心圆圈)被假定引进了序参量,但序参量本身是所有个体的行为协调为一个整体的后果,如协调一个厂商内所有个体的行为。虽然单个经济活动主体可力图施加其个体意愿——如序参量——于所有成员,但实际上,这种独裁式的强加只是序参量的一种极特殊的(多半不起作用的)情况。

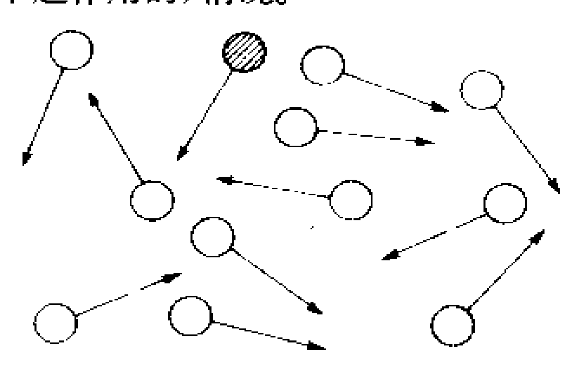


图 14.1a 混沌:不关联的部分(个体)

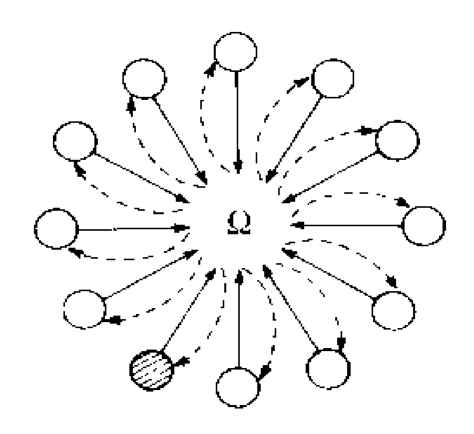


图 14.1b 有序:由自身衍生出的协调所导致的部分(个体)的关联

稳定的 2-周期螺旋式地逼近。在初始(螺旋式)阶段，循环性显示出“积累的”特征；然而当我们继续下去时，周期运动受到被称为不动点的 x_1^* 和 x_2^* 的吸引。“积累的过程”具有一个预定的终极状态。这种“循环因果关系”的过程被锁入一个吸引子区域内。这种现象可以被看作是长期停滞的一种形式化表现。在这种决定论的区域内，不存在任何逃离“被捕获”的循环因果关系的现象。

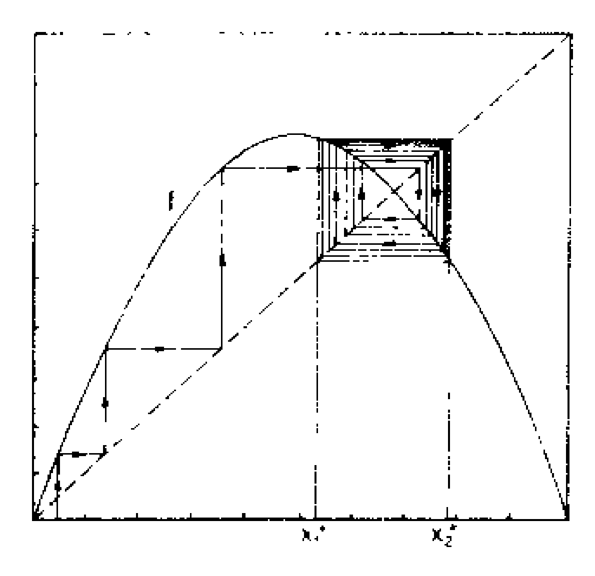


图 14.3 由吸引子锁定的“循环因果关系”

资料来源：费根鲍姆(1983)

如图 14.4 所示，人们可以提出一种更为复杂的、具有稳定的周期 4 的、隐含着循环因果关系的动态。在图 14.4 中，虚线所表示的正方形与图 14.3 中的是一致的。我们也同样可以给出类似于图 14.3 那样的、对循环因果关系的形象解释。

当然，这种形态描述法不能提供任何因果性的基本原理，虽然它是依据一个“过程规则系统”(叠代)来定义的。人们可

能会争辩道：如果一个周期本身具有一个简单性质，则不能将导致该周期的过程的非线性性质作为将它应用于非线性动力学的理由。我们可将这两个因果链 $y \rightarrow \Omega$ 和 $\Omega \rightarrow y$ 分开来分析，找出每个单一方程的解。这种分析在数学上是可能的——就像我们从丁伯根教授那儿知道的——即将这两个方程线性化并将它们分隔开来，以便于分别处理。

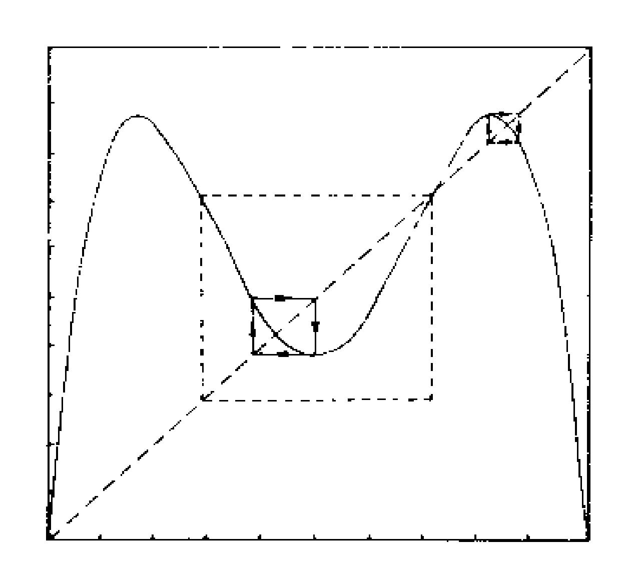


图 14.4 被锁定的"循环因果关系"的多重区域

资料来源：费根鲍姆(1983)

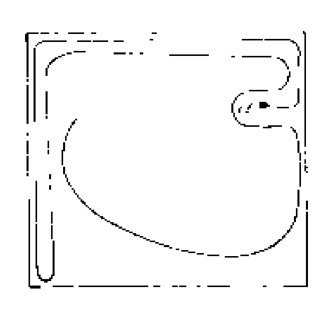
在这一程序下，对于一个"冻结的"有序，如刚性的制度环境，形态描述法可以一试。序参量可以被解释为不变的同态行为函数的相加的结果，而它反过来又以相同的不变方式将有序强加给每一个个体。这样，依赖于古典因果关系原则，模型能以一种决定论的方式建构起来。从经验上讲，这种方式的一个不变的、决定论的建构过程可以描述(虽然很不适当)原始社会或独裁的法西斯主义制度中的制度过程。

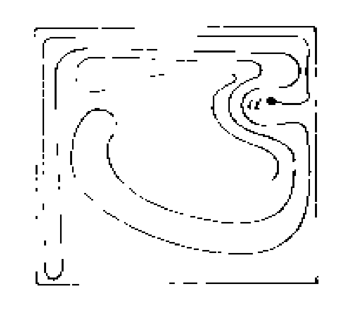
然而，如果我们认识到了前面提及的经济活动主体的特

征，则古典的和非古典的关于结构问题的结论都将被证明是不可能的。一旦我们承认学习能力和衍生出新奇性的能力是系统内所有个体的重要特征，则表现循环因果关系的每一个函数必定是非线性的。因此，图 14.1b 中所刻画的经济活动主体之间复杂的相互作用必定被解释为一个具有12 个非线性方程的系统。我们从有限区域上的非线性函数的数学理论中得知：对于具有三个方程的方程组而言，只要其中一个方程是非线性的，该系统就显示出混沌的特征。所以，(甚至)非古典动力学作为刻画经济世界的建构过程的一种手段也是不恰当的。

即便如此，庞加莱映象的特征促使人们着重强调实际生活中经济现象的一个本质特征：经济现象的有限性。这种有限性既适用于潜能又适用于它们的现实化。如果我们回顾一下热力学第二定律，现实化的有限性就立即能为我们所理解。任何现实化都是时空中"物质化"的某一形式，因而要受熵定律的支配。在涉及到一个潜能时，这种情况并非一定是不言而喻的。在传统经济理论中，潜能的概念通常（隐含地）被当作是无限的。它被作为某种规范，如作为一种"充分就业潜力"为人们所相信，这与经济系统的实际状态——展示出一种配置无效状态的失业——形成了鲜明对照。正如众所周知的增长理论所展示的那样，不存在任何一种从理论上指出了资源动态的有限性质的变量。与此截然不同的是，如果以其演化的含义来定义潜能，则它应被定义为信息潜能 (informational potential)。例如，创新是一种使人们以一种新方式来从事经济活动的信息潜能。信息的有限性不仅适用于其已实现的方面（如市场规模），也适用于信息本身。只要不是每一个人都拥

有它，信息就是一种潜能。当信息潜能被“应用”的时候，它就被消费掉了，因而是有限的。衍生出新信息潜能的潜力可能是无限的；单个信息潜能类似于能量、受熵的支配。





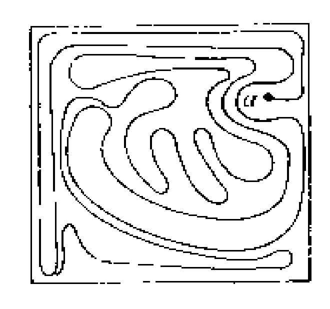


图 14.5 历史的景观：作为一个不可逆过程的潜能的实现

图 14.5 有助于说明一个受现实化（指潜能的物化——译者）支配的潜能的有限性和历史性。我们拿一张纸（一个二维空间），并允许在上面用铅笔任意涂画，但规定禁止所画的线相交，即一个潜能的现实过程不能被重复。初始点和终点之间的区间是有限的，初始点 α 可任意选定。例如，在一个经济潜能的区域内，这一点可能意味着一个发明可以有不同的实现路径。正如取图中的 α 点那样，对发明的具体实现路径的选择可能是相当任意的，但也可能是深思熟虑的结果。线在纸上不断地画下去，有趣的现象就发生了。开始，我们画线时如鱼得水般的自由，但不久我们就会意识到，随着我们的笔的不断移动，可选择的空间不断地缩小。而且，已画出的图案（线的几何结构）通过迫使我们调整下一次的落笔之处强加给我们一个序参量。我们现在的行为逐渐由过去的行为所决定。演化路径变得逐渐趋于决定论这一点是该系统的一个内在性质。该路径具有一个方向，它由变化着的自由度及对连续不断的行为施加的强制影响所决定。从方法论上讲，我们

具有一种不断变化的预测后果的能力。在这个画线游戏开始时，预测似乎是完全不可能的，执笔者仅通过向相反方落笔就可愚弄那些预测他下一笔将落在何处的人。随着画线的进行，预测者的预测逐渐准确起来，因为执笔者受到了已绘出图案的限制。从经济角度讲，依据一个旧的潜能来发现新的结果（潜能的实现）变得愈加困难。相应地，当潜能被耗尽或其实现过程达到其终点时，差额剩余将逐渐消失。

此时关键的问题是：在一个潜能耗尽的领域中（如在一个行业中缺乏创新）经济活动主体的反应是什么？人们既能改变游戏的创造性规则——线不相交的规则——也能引入经济过程的可重复性：放弃实现潜能。这样，执笔者能够占有的仅仅是存在着的点，而经济活动主体的创新也将为零了。只要现存要素的数量不能补偿系统性质停滞的损耗，则经济将停滞。一个经济的演化必然要依赖其经济活动主体的创造性。

14.6 结构的变化：相变

至此，我们的分析通过观察在一个给定结构中发生了什么来阐明结构区域的某些同步特征。下一个问题是：结构是如何演化的，系统的性质是如何随时间而变化的。自然科学中的研究指出，所有结构变化都具有一群可用相变的单一概念来表示的特征。如果性质 A 和 B 是有区别的，则相变是一个从 A 到 B 的变化。以水为例，水是由氢原子和氧原子构成的。依据温度（环境）的变化，水既可变为蒸汽（≥100℃），也可变为冰（≤0℃）。依据环境，分子或原子在它们的关联倾向上显示出不同的性质。温度越低，促使单个分子形成一个

稠密结构的序参量的"命令"就越严格。在数值完全等于相变所需的临界值时，有序以一种"突然的"方式出现。这意味着：决定集体行为的变量在结构区域的一个时间区间内是不变的。

水的结构显然不同于经济的结构，但通过对水结构的观察，我们可以得出：序参量（如制度）显示出一种很强的稳定性，并且经常以一种不连续的方式变化。另外，经济结构的变化经常以相变的形式出现。有限（由实现造成的可耗尽性）的结构潜能与过程潜能概念给为什么会发生相变，即从结构性质A到B的不连续变化提供了理论基础。但是，简单现象（如水）的相变的独特特征不能以一种简单的方式运用于复杂的经济现象中。

在整个时间序列中，系统的这些行为的差异何在呢？具体地概括如下：简单系统遵守简单"规则"，复杂系统遵守复杂"规则"。简单规则的一个主要特征是它们具有高度的决定论的特征；复杂规则的一个主要特征是，在定义一个系统的行为和变化中，它们被允许具有高度的自治性特征。一个复杂系统不能被简化为单一的几个简单系统之和，因为这样一种理论上的组合，对一个复杂系统的自治性而言，缺乏理论基础。如果我们假定经济系统是一个复杂系统，则我们需要对该系统的功能做出整体的理论说明。对涉及到系统自由度方面的决定论和自治性所做出的基本假设必须从一开始就进入理论的核心。

下面的讨论将阐明，非线性动力学研究和经济学的演化研究之间的主要差异在于对经济系统整体性质的基本的本体论假设。这种基本概念上的差异被下列事实弄得模糊不清，

件相关，因为它们所导致的路径由一个轨迹定律决定。给定一个凸型的位势函数，则系统的终极状态可明确地决定。依据具有凸状位势函数的非线性动态——这种位势函数将一条轨迹的终极状态描绘成一个定点吸引子——我们可重新定义经济均衡理论。在一个既定的非凸状位势函数条件下，不能明确地预测出决定论系统的终极状态（如可能产生多重的均衡价格）。演化经济学家感兴趣的是：强调初始条件"未定"的这种分析表达了经济学作为一个历史过程的观念。但是，这种类型的历史具有两个机械论的特征：它既是完全决定论的，又是完全偶然的。虽然历史的确可以显示出与偶然性相结合的决定论特征，但它既不仅仅是决定论的，也非仅仅是偶然的，而是一个在共同演化框架内人类的自治、意图、欲望及抗争的表现。

当我们刻画一个历史过程时，通过探讨分岔的概念，可以突出概念上的差异。在一个位势函数中，分岔本身自然不具有任何独立存在的含义，因为它仅是一种形式结构。但是，如果将这种形式结构应用于现实，它将产生出一种因果关系的含义。在赋予分岔概念以一种特殊含义的位势函数概念中，存在着两个关键的决定论因素。我们转向图 14.6，从中可以区分出轨迹的规则阶段 a 和不规则阶段 b。该系统在第一阶段中，以一种"旧方式"表现出决定性的行为直至 x' 为止。如果系统的位势函数是非凸状的，则一旦达到特定的参数值，在分岔点 x' 上系统将或向 A 运动或向 B 运动。分岔点 x' 完全由位势函数的整体性质决定。不仅趋向分岔点的路径，就是分岔点本身也是完全确定的，不受任何"影响"。这类关于分岔点的决定论观点以相同的方式适用于预测模型和混沌模

任何规律性。这个特定的参数值刻画了从一个时间对称系统到一个时间不对称系统的质变。这种系统性质的转换本身是一个决定论过程，历史不能被引入这种概念的时间中，因为我们未对在一个实时的连续统一体内位势函数序列的所有行为做出任何解释。即使存在着机械的分岔，但对整个人类历史而言，建构一个单一的整体位势函数几乎是没有意义的。如果真的建构了这种位势函数，那么建构过程中一定隐含着这样一种荒谬的假设，即人类从穴居到计算机的进化是依据一个不断前进的混沌过程。这是与十八、十九世纪机械论信仰的进步理想相对立的。我们可以将之看作一种新奇的、非线性比较静态的形式，它所刻画的不是生命过程的连续统一体，而是决定论轨迹的最终结果。时间的概念仅被用于评估可重复性和不可重复性的理论特征，而忽视了其更适于在生命系统中"内在地"描述演化整体中各个部分的功能的、形态的和历史的综合这种用途。以时间、决定论、可预测性等概念为基础的分岔概念，在演化模型中具有极为不同的含义。让我们再一次回到图 14.6，我们可以证明：阶段 a 本身不可能是完全决定论的。为此，我们必须提供一种基本理论，即分岔点并非(事先)确定的，而是可能发生于 x' 之前或之后。更确切地说，分岔在大多数情况下将包括人的选择。通向 A 或 B 的路径①在 x' 处并非是不可避免的，而②终极状态 A 或 B 并非一定是"未定的"。最后需要说明的是，历史过程阶段 a 和在分岔进行的类型选择之间存在着一种紧密的关系。因而这种选择并非是在 A 和 B 之间的选择，而是在 α 和 β 之间做出选择，其中 α 是具有终极状态 A 与 B 的这一过程的时间连续统一体内的一个特定点，β 是对具有终极状态 A' 与 B' 的各过

程所进行的选择。例如，政策行动的选择可以被故意延迟，而导致一个具有更宽角度的分岔，如图 14.7 中所示的终极状态 A' 和 B'。例如，在当今历史中，发生于东欧的制度转换可以理解为一个系统的分岔——它提供了根本上的分权和包括政治独裁主义与军国主义在内的扩大集权这两种选择。我们可以在考虑到苏联的情况下，特别地探讨这种分岔行为，而进一步的发展可作为一种对系统分岔进行选择的过程来评估。一般而言，已概括的这些概念性论述的确提示我们，要对一个阶段 a 的历史过程和刻画于一个分岔方案中的未来选择——当它决定一个未来的阶段 b 时——之间的规律性做出合理的假设。这种"定律"——它是决定论的——仅以一种猜想的方式适用于未来选择，因为其后果是假设的，总是需要涉及到人这一主体的实际决策。至于演化的路径，过程与分岔之间所假定的关系可以描述并阐明经验的规律性；考虑到在产生和选择演化潜能——它构成了分岔——的过程中已实现的自

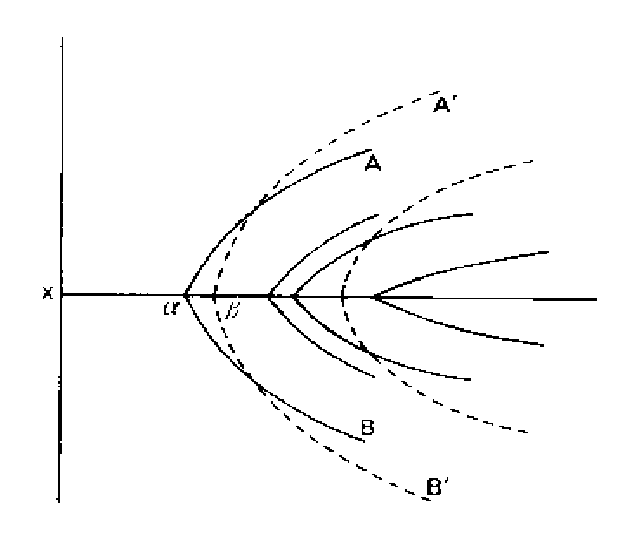


图 14.7　作为选择的连续过程的分岔

治，一个从决定论模型中提出的、事先决定的未来时间的对称性是不能被接受的。

决定论分岔的概念排除了——作为其逻辑必要条件——终极概念。这种非线性模型预示着：首先，将存在着一个分岔；其次，系统的最终特征不能被确定。如果用规范的语言来表述，就是说分岔可能暗示着一个由叠加的因果关系 A 或 B 所加强的经济过程，其中 A 代表一个不合意的经济过程或经济结果，B 代表一个合意的经济过程或经济结果。不存在任何方式的对初始分岔点的外生影响（通过政策），因为这是该方程本身整体性质的确定性结果。引入外生决策意味着不使用该方程或不接受其逻辑结果。关键之处在于该方程所刻画的是路径的"形式"而非其方向。考虑一个显示混沌特征的流体的例子：正如图 14.8 所示，循环的特有"形式"总是相同的；但其方向（向右或向左流动）的确定则完全是偶然的、不可预见的。这种决定论的偶然性意味着没有终极要素进入该模型内。

沿着类似的思路，我们可以得出：在该模型中不存在相等终极（equifinality）。相等终极表明一个系统的最终目标状态可以从不同的初始状态达到。由于开放系统受控于一个高度变化的环境，故它对这种相等终极特征极为依赖。在一个非线性模型中，其路径被看作是非遍历的（指遍历理论所描述的一种状态，即虽然路径的选择是众多的，但系统演化只能选择其中的一种——译者）。这种概念包含着在初始分岔处的较小事件不能被抹掉和"遗忘"的意思。尽管将非遍历性引入一个非线性模型赋予该模型以令人感兴趣的、附加的"历史"特征，但该模型本身并不包含任何关于终极本质的论述，

因为其令人感兴趣的概念的本质在于它假设并强调了“分岔的偶然性”。考虑到分岔点被赋予一个事后的历史基本原则，因而该模型可能被赋予一个事后的历史含义。从概念上讲，非遍历性并不包括终极或相等终极的含义，因此它达不到一个真正演化的、非动态和非决定论模型的要求。

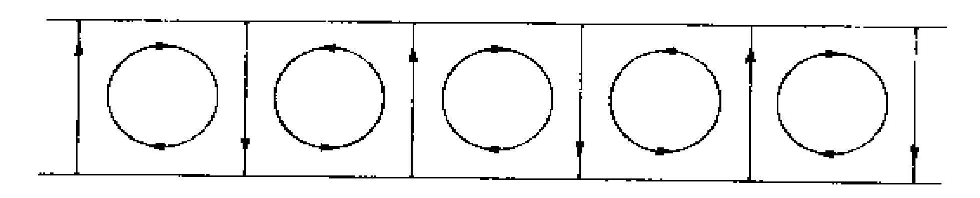


图 14.8　具有混沌方向的循环规律性

14.7　动态经济学与演化经济学的作用：各种类型的政策推理

我们现在转向关于经济政策的某些结论——这正是丁伯根教授主要关心的问题。理性的经济政策必定依赖于经济理论；不同的理论将得出不同的政策结论。即使一个经济理论声称自己是实证的，不包含任何价值判断，但其关于基本可能性和确定性的可能以及自由度的先入之见将造成该理论的规范性，因为该理论在其可行性的论述中涉及到人的行为，这是一种自封的“客观”判断。经济政策的关键问题是（整体的）过程或路径的确定性与政策的自治性相对立。经济研究的定量方面与定性方面的区别属于极其根本的重要问题。然而，回顾一下前面的论述就会知道，关于什么是定性或定量特征的论述决不能基于一种“客观的”理论，也决不能被先验地当作不言而喻的；它依赖于论述一个现象基本性质的经济

——它们通过其运行带给我们最优状况，或更确切地说，是贯穿于时间序列的最优发展。用更学术性的语言来说就是：我们不得不寻求一组其活动能为大量方程所描述的制度。这组制度的行为方程的总和应与最优福利的条件相等。

丁伯根研究的另一个特征，即演化路径的确定性就整体而言并非决定论的表明，人们不应批评它是一种简单的机械论研究。政策干预意味着依据工具干预重新确定并调整动态轨迹。然而，如果要做出关于内生经济路径的理性预期和预期评估，则有效的政策干预就依赖于目标与工具变量之间的高度确定性。政策行动假定了决定论；完善的行动意味着完全预见，这反过来又暗示了“外部”世界的一个决定论本质。经济计划和前面提及的政策研究在逻辑上和本体论上是依据一批（局部）决定论的核心模型的。

第二个研究的特征是具有不可预测性特征的非线性决定论的经济动态。科学的脚步从线性模型踏入非线性模型被证明是从可预测性跨入了不可预测性。作为一种冲击的出现，这预示着科学第三次革命的来临，因为可预测性一直被假定是决定论的一个必要特征。这种新的非线性动力学显示出：大量“机械论的事件”必然且本质上是不可预测的。在经济动态中给定非周期性和非规律性的条件下，我们不能在政策目标和政策工具之间建立一种可靠的联系，既不能预测未来，也不能恰当地评估政策行动的后果。对动态的这种非线性观点导致了如下结论：或者因约束经济政策而影响其适用的广度——在那里，参数值会产生一个合意的规律性和稳定

性，或者完全放弃制定经济政策。在论及商业周期时，R·H·戴(1986)总结说：

> 对波动的信念将会恢复。对波动的控制本身可能会受到作用范围有限的政策的限制。通过控制变量来实现目标值的企图将不得不被放弃。

最后，第三个研究是具有准确定性和历史偶然性特征的非线性动力学。对非线性动力学的折衷研究并非依赖于一个整体模型，而是代之以重建这样一个模型：它既包含着混沌因素——在初始条件下的分岔特征(凹状位势函数)——又包含着对与非线性模型导出的一个决定论过程描述的要素相联系的历史偶然事件的系统分析。这些动态模型对制度经济学家显示出特殊的吸引力，因为他们不仅拒绝一条产生确定路径的整体轨迹，而且力图将经济过程作为一个显示(非古典的)经济动态典型特征的模型来重建。这(虽然似乎并未得到公认)接近于丁伯根教授的研究，他的研究也类似地拒绝一个整体观点，并建构了大量局部的轨迹——它们是由包括政策决定和一条趋于终极状态的确定路径在内的初始条件所定义的。所不同的是，在前一模型中，决策是由市场活动主体自身做出的；而在丁伯根的模型中，一个外生的政策权力在动态路径的初始处就实行了干预。但是，把具有准确定性的非线性研究应用于丁伯根意义上的决策也是可能的。

从这三种动态研究的讨论中能得出关于经济政策的什么结论呢？显然，应用这些模型中的任何一个都要非常依赖所分析的经济过程的类型和本质。如果研究的是相对简单的短期

现象，则相对简单的线性计量经济模型就足以作为政策的基础。关于计量经济学模型在3—6个月的时间范围内可能是极为有用的这一点，经济学家们存在着共识。经济动态的非线性整体模型为经济政策提供了一种在定性与定量方面均不同于计量经济学的研究方法。在描述周期性和规律性的参数值范围内，一些不同的工具变量——更为整体性地设计的——可以使人们控制经济演化路径；在产生混沌的（完全的）非规律性和非周期性的参数值范围内，明确的政策建议是完全不干预。正是这第二种范围的参数值向任何关于经济政策的研究（如果在一个整体的非线性模型的定性基础上进行的话）的有用性提出了挑战。对于经济政策而言，无论完全确定性的特征还是完全不确定性的特征，都不是一种合适的概念。

就制度经济学家和演化经济学家关于过程的观点而言，经济动态的折衷研究是最有吸引力的。它突出了作为一系列质变的经济动态，赋予分岔以一种"历史偶然性"的特征，并且将累积的因果关系引入对出现的动态路径的描述——这对制度分析具有极大的吸引力。对这种折衷研究的主要异议是：它仍依赖于具有狭义概念的位势函数、机械论的景观、既定的外生分岔、及以对非线性模型的描述而非解释为基础的累积概念等这一类特征的经济动态结构。如果我们接受经济研究是具有描述与解释两个面的一枚硬币的观点，则对经济动态的折衷研究似乎为科学描述的问题提供了最适当的答案。

从我们的演化研究中可以推断出：一个行之有效的经济政策既应包括结构变化的"客观"因素，又应包括人的行为的"主观"因素。这两个领域的探究都将需要描述和解释两方面的工作。构成这样一种理论体系的"重要变量"是解释变量

——其理论上的相互影响要求理解所分析的经济过程。解释性经济理论认为时间不对称——远不仅是一种被叠代的整体非线性方程的形式特征——具有一种名副其实的历史含义。为刻画这种历史含义，解释变量必须被挑选出来。

在此背景下，政策结构可以从历史的宿命（historical constellation）这一概念出发。历史的宿命解释了历史的过去和历史的未来的时间范围。历史的过去被定义为被实现的潜能的具体演化。从政策作用的观点看，它构成了——在每个历史的宿命处——现时的某一具体方面的约束。只有依据一种对历史分析的"理解"，才能够了解这些约束。与历史机遇有关的时间未来被定义为一些未实现的结构和过程潜能——在 t_0 处知道或不知道的。我们称这部分可行的未实现的潜能为"历史机遇"（historical opportunity）。对政策进展的分析将包括对经济的创造性潜能、潜能实现的可行性与可能性的状况、实现中的社会成本与收益等问题的评估。与上述假设相反，决定论观点并不需要有关经济事件规律性的知识，因为过去与未来的潜能具有不同的性质，而任何对称的处理都将与非对称的经济现实所提出的基本需要背道而驰。对定量研究来说，为了解释过去实现的经济潜能，就要收集统计数据。关键并不在于对不变规律性的归纳推理，而是借助于数值来理解历史宿命的性质。只有这样，我们才能理解未来政策行动的历史机遇。正是这种信息的含义而不是技术手段的效率或市场信息的传播速度，将构成经济政策行动和经济活动主体的反应。如果我们了解数据代表什么，则经验研究是极为必要的——我们应注意这一事实：与潜能的评估或经济政策的效用相关的经验记录极其依赖于它们的信

息传递方式。

14.8 结束语

丁伯根教授指出，无论定量研究还是定性研究在经济学中都是重要的。我们已经看到，这的确是个重要的见识，但依据研究者不同的认知观点和理论观点，它能被给予不同的解释。我们的主要观点以一个演化系统方法为基础，因而极不同于丁伯根教授的"机械论"方法。虽然我们之间研究方法上的对立可能是不可调和的，但我们仍拥有二千多年前塞内加写给卢齐利乌斯①的信中所表达出的一些共同的价值判断：

> 数学家教我如何去丈量我的土地；但他倒不如告诉我，人类有多少土地就够用了。他教我数钱和赚钱；但他倒不如告诉我这些计算并不重要：忙碌于管理其百万遗产的人决不快乐……如果我知道如何去将一块土地分成四份，但不知道如何将之与我的兄弟平分，那么他教授的东西对我有什么帮助呢？如果一个不礼貌的邻居在耕种时从我的土地上敲诈去一块而使我大为不满，那么对我来说，小心翼翼地一

---

① 塞内加(Seneca，约公元前4—公元65年)，古罗马雄辩家、悲剧作家、哲学家、政治家。卢齐利乌斯(Lucilius，约公元前180—约公元前103年)，古罗马诗人。本文作者所引用的是塞内加的《致卢齐利乌斯的信》(Letter to Lucilius)中的一段。以《致××人的信》为题是古罗马时代十分盛行的论述形式，其宗旨在于批驳××人的观点，其致信的对象不仅仅局限于当时的学者，也包括那些过世的学者。——译者

英汉术语名词对照表

attractor	吸引子
agent	经济活动主体
basin of attraction	吸引域
chaos	混沌
correlation dimension	相关维数
dimension estimate	维数估计
ergodic	遍历的
fractal	分形
fractal dimension	分维
Logistic	逻辑斯谛
overlapping-generations	叠代
period-doubling	倍周期
recursive	递归
scale invariance	尺度不变性
stranger attractor	奇怪吸引子
symbolic dynamics	符号动力学
universality	普适性

参考文献

① Ashley, R. and D. Patterson. 1985."Linear Versus Nonlinear Macroeconomies: A Statistical Test." Virginia Polytechnic Institute, Blacksburg, VA.

② Barnett, W. A. and P. Chen. 1986. "Economic Theory as a Generator of Measurable Attractors." *Mondes en Developpement* 14 (453); reprinted in I. Prigogine and M. Sanglier, Eds., *Laws of Nature and Human Conduct: Specificities and Unifying Themes*. Brussels: G.O.R.D.E.S., pp. 209-24.

③ Forthcoming. "Deterministic Chaos and Fractal Attractors as Tools for Nonparametric Dynamical Econometric Inference." *International Journal of Mathematical Modeling.*

④ Barnett, W. A., and Chen, P. 1988.
"Deterministic chaos and fractal attractors as tools for nonparametric dynamical econometric inference," *Mathematical Computer Modeling*, 10, 275-96.

⑤ Barnett, W.A., and Choi, S. (1987), "A Monte Carlo study of tests of blockwise weak separability," *Journal of Business and Economic Statistics*, forthcoming.

⑥ Baumol, W.J. and E.N. Wolff,"Feedback on Productivity Growth to R&D," *Scandinavian Journal of Economics*, 1983,

uishing deterministic and random systems," in *Dynamic Econometric Modeling*, Proceedings of the Third International Symposium in Economic Theory and Econometrics, ed. by W. Barnett, E. Berndt, and H. White, Cambridge: Cambridge University Press, 247-68.

⑲ Brock, W., Dechert, W.D., and Scheinkman, J.A.(1986), "A test for independence based on the correlation dimension," working paper, Economics Department, University of Wisconsin, Madison.

⑳ Brock, W., and Sayers, C.L.(1986), "Is the business cycle characterized by deterministic chaos?" Working Paper 8617, Social Systems Research Institute, University of Wisconsin, Madison.

㉑ Collet, P. and J. Eckmann, *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*. Basel: Birkhauser, 1980.

㉒ Crutchfield, James, et al., "Geometry From a Time Series," *Physical Review Letters*, 1980, 47, 712.

㉓ Crutchfield, J.P. and J.D.Farmer. 1982. "Fluctuations and Simple Chaotic Dynamics." *Physics Report* 92: 45-82.

㉔ Dana, R.A. and P.Malgrange, "The Dynamics of a Discrete Version of a Growth Cycle Model." In Ancot, J.P.(ed.), *Analyzing the Structure of Econometric Models*. Amsterdam: M. Nijhoff, 1984.

㉕ Day, R. 1985. "Dynamical Systems Theory and Complicated Economic Behavior." *Environment and Planning B: Planning and Design* 12: 55-64.

㉖ Day, R.H. (1986) "Unscrambling the Concept of Chaos Through Thick and Thin Reply", *Quarterly Journal of Economics* 101, 425-426.

㉗ Day, R.H. and W.J.Shafer, "Keynesian Chaos," Department of Economics, University of Southern California, 1983.

㉘ Deneckere, R. and S.Pelikan, "Competitive Chaos," *Journal of Economic Theory*, 1986, 40, 13-25.

㉙ Diamond, P., "Chaotic Behavior of Systems of Difference Equations," *International Journal of Systems Science*, 1976,

7, 953-956.

㉚ Feigenbaum, M.J. 1978. "Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations." *Journal of Statistical Physics* 19: 25-52.

㉛ Frank, M.Z., and Stengos, T. (1986), "Measuring the strangeness of gold and silver rates of return," Discussion Paper #1986-13, Economics, University of Guelph, Ontario.

㉜ Forthcoming. (1987), "Some evidence concerning macroeconomic chaos," Department of Economics, University of Guelph, Ontario.

㉝ Gleick. J. 1987a."When Chaos Rules the Market." *The New York Times* (22 November): Section 3.1 and 8-9.

㉞ Forthcoming. 1987b. "New Images of Chaos that are Stirring A Science Revolution." *Smithsonian* 18 (September): 122-35.

㉟ Grandmont, J.M., "On Endogenous Competitive Business Cycles," *Econometrica*, September 1985, 5, 995-1045.

㊱ Grandmont, Jean Michel,"Periodic and Aperiodic Behavior in Discrete, One-dimensional, Dynamical Systems." In Hildenbrand, W. and A Mas-Collel, eds, *Contributions to Mathematical Economics*. New York: North Holland, 1986.

㊲ Granger, C.W.J. and P.Newbold. 1974. *Forecasting Economic Time Series*. New York: Academic.

㊳ Grassberger, P. and I.Procaccia, "Measuring the Strangeness of Strange Attractors," *Physica*, 1983, 9*D*, 189-208.

㊴ Guckenheimer, J. and P.Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields. New York: Springer-Verlag, 1983.

㊵ Hinich, M.(1982), "Testing for Gaussianity and linearity of stationary time series," *Journal of Time Series Analysis*, 3, 169-76.

㊶ Jacobson, M., "Absolutely Continuous Invariant Measures for One-Parameter Families of One-Dimensional Maps," MDUL-Comm. Math. Phys. MDNM, 81, 1981, 39-88.

㊷ Jensen, R.U. and Urban, R., "Chaotic Price Behavior in a Non-

1964, 16, 61-71.

56 Scheinkman, J. and B. Le Baron, "Nonlinear Dynamics and Stock Returns," Department of Economics, University of Chicago, 1986.

57 Shaw, R., "Strange Attractors, Chaotic Behavior, and Information Flow," *Zhurnal Naturforsch*, 1981, 36A, 80.

58 Smale, Steven, "Differentiable Dynamical Systems," *The Bulletin of the American Mathematical Society*, 1967, 74, 747-817.

59 Stefan, P., "A Theorem of Sarkovskii on the Existence of Periodic Orbits of Continuous Endomorphism of the Real Line," *Communications in Mathematical Physics*, 1977, 54, 237-248.

60 Takens, F., "Distinguishing Deterministic and Random Systems." In Rosenblatt, G.G. Iooss, and D. Joseph (eds.), *Nonlinear Dynamics and Tubulence*. Boston: Pitman, 1985, 315-333.

61 Takens, F. 1984. "On the Numerical Determination of the Dimension of an Attractor." Unpublished manuscript.

62 Wolf, A. and J. Swift. 1984. "Progress in Computing Lyapunov Exponents from Experimental Data." In *Statistical Physics and Chaos in Fusion Plasmas*, C.W.Holton, Jr. and L.E.Reichl, Eds. New York: Wiley.

62 Wolf, A., J. Swift, H. Swinney, and J.Vastano. 1984. "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series." Department of Physics, University of Texas at Austin, Austin, TX.

64 Woodford, M., "Imperfect Financial Intermediator and Complex Dynamics." In Barnett, W., J. Geweke and K. Shell, *Chaos, Sunspots, Bubbles and Nonlinearity*. New York: Cambridge University Press, 1987.

1964, 16, 61-71.

56. Scheinkman, J. and B. Le Baron, "Nonlinear Dynamics and Stock Returns," Department of Economics, University of Chicago, 1986.

57. Shaw, R., "Strange Attractors, Chaotic Behavior, and Information Flow," *Zhurnal Naturforsch*, 1981, 36A, 80.

58. Smale, Steven, "Differentiable Dynamical Systems," *The Bulletin of the American Mathematical Society*, 1967, 74, 747-817.

59. Stefan, P., "A Theorem of Sarkovskii on the Existence of Periodic Orbits of Continuous Endomorphism of the Real Line," *Communications in Mathematical Physics*, 1977, 54, 237-248.

60. Takens, F., "Distinguishing Deterministic and Random Systems." In Rosenblatt, G.G. Iooss, and D. Joseph (eds.), *Nonlinear Dynamics and Tubulence*. Boston: Pitman, 1985, 315-333.

61. Takens, F. 1984. "On the Numerical Determination of the Dimension of an Attractor." Unpublished manuscript.

62. Wolf, A. and J. Swift. 1984. "Progress in Computing Lyapunov Exponents from Experimental Data." In *Statistical Physics and Chaos in Fusion Plasmas*, C.W.Holton, Jr. and L.E.Reichl, Eds. New York: Wiley.

62. Wolf, A., J. Swift, H. Swinney, and J.Vastano. 1984. "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series." Department of Physics, University of Texas at Austin, Austin, TX.

64. Woodford, M., "Imperfect Financial Intermediator and Complex Dynamics." In Barnett, W., J. Geweke and K. Shell, *Chaos, Sunspots, Bubbles and Nonlinearity*. New York: Cambridge University Press, 1987.

1964, 16, 61-71.

56 Scheinkman, J. and B. Le Baron, "Nonlinear Dynamics and Stock Returns," Department of Economics, University of Chicago, 1986.

57 Shaw, R., "Strange Attractors, Chaotic Behavior, and Information Flow," *Zhurnal Naturforsch*, 1981, 36A, 80.

58 Smale, Steven, "Differentiable Dynamical Systems," *The Bulletin of the American Mathematical Society*, 1967, 74, 747-817.

59 Stefan, P., "A Theorem of Sarkovskii on the Existence of Periodic Orbits of Continuous Endomorphism of the Real Line," *Communications in Mathematical Physics*, 1977, 54, 237-248.

60 Takens, F., "Distinguishing Deterministic and Random Systems." In Rosenblatt, G.G. Iooss, and D. Joseph (eds.), *Nonlinear Dynamics and Tubulence*. Boston: Pitman, 1985, 315-333.

61 Takens, F. 1984. "On the Numerical Determination of the Dimension of an Attractor." Unpublished manuscript.

62 Wolf, A. and J. Swift. 1984. "Progress in Computing Lyapunov Exponents from Experimental Data." In *Statistical Physics and Chaos in Fusion Plasmas*, C.W.Holton, Jr. and L.E.Reichl, Eds. New York: Wiley.

62 Wolf, A., J. Swift, H. Swinney, and J.Vastano. 1984. "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series." Department of Physics, University of Texas at Austin, Austin, TX.

64 Woodford, M., "Imperfect Financial Intermediator and Complex Dynamics." In Barnett, W., J. Geweke and K. Shell, *Chaos, Sunspots, Bubbles and Nonlinearity*. New York: Cambridge University Press, 1987.

1964, 16, 61-71.

⑯ Scheinkman, J. and B. Le Baron, "Nonlinear Dynamics and Stock Returns," Department of Economics, University of Chicago, 1986.

⑰ Shaw, R., "Strange Attractors, Chaotic Behavior, and Information Flow," *Zhurnal Naturforsch*, 1981, 36A, 80.

⑱ Smale, Steven, "Differentiable Dynamical Systems," *The Bulletin of the American Mathematical Society*, 1967, 74, 747-817.

⑲ Stefan, P., "A Theorem of Sarkovskii on the Existence of Periodic Orbits of Continuous Endomorphism of the Real Line," *Communications in Mathematical Physics*, 1977, 54, 237-248.

⑳ Takens, F., "Distinguishing Deterministic and Random Systems." In Rosenblatt, G.G. Iooss, and D. Joseph (eds.), *Nonlinear Dynamics and Tubulence*. Boston: Pitman, 1985, 315-333.

㉑ Takens, F. 1984. "On the Numerical Determination of the Dimension of an Attractor." Unpublished manuscript.

㉒ Wolf, A. and J. Swift. 1984. "Progress in Computing Lyapunov Exponents from Experimental Data." In *Statistical Physics and Chaos in Fusion Plasmas*, C.W.Holton, Jr. and L.E.Reichl, Eds. New York: Wiley.

㉒ Wolf, A., J. Swift, H. Swinney, and J.Vastano. 1984. "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series." Department of Physics, University of Texas at Austin, Austin, TX.

㉔ Woodford, M., "Imperfect Financial Intermediator and Complex Dynamics." In Barnett, W., J. Geweke and K. Shell, *Chaos, Sunspots, Bubbles and Nonlinearity*. New York: Cambridge University Press, 1987.

1964, 16, 61-71.
⑯ Scheinkman, J. and B. Le Baron, "Nonlinear Dynamics and Stock Returns," Department of Economics, University of Chicago, 1986.
⑰ Shaw, R., "Strange Attractors, Chaotic Behavior, and Information Flow," *Zhurnal Naturforsch*, 1981, 36A, 80.
⑱ Smale, Steven, "Differentiable Dynamical Systems," *The Bulletin of the American Mathematical Society*, 1967, 74, 747-817.
⑲ Stefan, P., "A Theorem of Sarkovskii on the Existence of Periodic Orbits of Continuous Endomorphism of the Real Line," *Communications in Mathematical Physics*, 1977, 54, 237-248.
⑳ Takens, F., "Distinguishing Deterministic and Random Systems." In Rosenblatt, G.G. Iooss, and D. Joseph (eds.), *Nonlinear Dynamics and Tubulence*. Boston: Pitman, 1985, 315-333.
㉑ Takens, F. 1984. "On the Numerical Determination of the Dimension of an Attractor." Unpublished manuscript.
㉒ Wolf, A. and J. Swift. 1984. "Progress in Computing Lyapunov Exponents from Experimental Data." In *Statistical Physics and Chaos in Fusion Plasmas*, C.W.Holton, Jr. and L.E.Reichl, Eds. New York: Wiley.
㉒ Wolf, A., J. Swift, H. Swinney, and J.Vastano. 1984. "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series." Department of Physics, University of Texas at Austin, Austin, TX.
㉔ Woodford, M., "Imperfect Financial Intermediator and Complex Dynamics." In Barnett, W., J. Geweke and K. Shell, *Chaos, Sunspots, Bubbles and Nonlinearity*. New York: Cambridge University Press, 1987.

1964, 16, 61-71.

56 Scheinkman, J. and B. Le Baron, "Nonlinear Dynamics and Stock Returns," Department of Economics, University of Chicago, 1986.

57 Shaw, R., "Strange Attractors, Chaotic Behavior, and Information Flow," *Zhurnal Naturforsch*, 1981, 36A, 80.

58 Smale, Steven, "Differentiable Dynamical Systems," *The Bulletin of the American Mathematical Society*, 1967, 74, 747-817.

59 Stefan, P., "A Theorem of Sarkovskii on the Existence of Periodic Orbits of Continuous Endomorphism of the Real Line," *Communications in Mathematical Physics*, 1977, 54, 237-248.

60 Takens, F., "Distinguishing Deterministic and Random Systems." In Rosenblatt, G.G. Iooss, and D. Joseph (eds.), *Nonlinear Dynamics and Tubulence.* Boston: Pitman, 1985, 315-333.

61 Takens, F. 1984. "On the Numerical Determination of the Dimension of an Attractor." Unpublished manuscript.

62 Wolf, A. and J. Swift. 1984. "Progress in Computing Lyapunov Exponents from Experimental Data." In *Statistical Physics and Chaos in Fusion Plasmas*, C.W.Holton, Jr. and L.E.Reichl, Eds. New York: Wiley.

62 Wolf, A., J. Swift, H. Swinney, and J.Vastano. 1984. "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series." Department of Physics, University of Texas at Austin, Austin, TX.

64 Woodford, M., "Imperfect Financial Intermediator and Complex Dynamics." In Barnett, W., J. Geweke and K. Shell, *Chaos, Sunspots, Bubbles and Nonlinearity.* New York: Cambridge University Press, 1987.

1964, 16, 61-71.

⑯ Scheinkman, J. and B. Le Baron, "Nonlinear Dynamics and Stock Returns," Department of Economics, University of Chicago, 1986.

⑰ Shaw, R., "Strange Attractors, Chaotic Behavior, and Information Flow," *Zhurnal Naturforsch*, 1981, 36A, 80.

⑱ Smale, Steven, "Differentiable Dynamical Systems," *The Bulletin of the American Mathematical Society*, 1967, 74, 747-817.

⑲ Stefan, P., "A Theorem of Sarkovskii on the Existence of Periodic Orbits of Continuous Endomorphism of the Real Line," *Communications in Mathematical Physics*, 1977, 54, 237-248.

⑳ Takens, F., "Distinguishing Deterministic and Random Systems." In Rosenblatt, G.G. Iooss, and D. Joseph (eds.), *Nonlinear Dynamics and Tubulence.* Boston: Pitman, 1985, 315-333.

㉑ Takens, F. 1984. "On the Numerical Determination of the Dimension of an Attractor." Unpublished manuscript.

㉒ Wolf, A. and J. Swift. 1984. "Progress in Computing Lyapunov Exponents from Experimental Data." In *Statistical Physics and Chaos in Fusion Plasmas*, C.W.Holton, Jr. and L.E.Reichl, Eds. New York: Wiley.

㉒ Wolf, A., J. Swift, H. Swinney, and J.Vastano. 1984. "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series." Department of Physics, University of Texas at Austin, Austin, TX.

㉔ Woodford, M., "Imperfect Financial Intermediator and Complex Dynamics." In Barnett, W., J. Geweke and K. Shell, *Chaos, Sunspots, Bubbles and Nonlinearity.* New York: Cambridge University Press, 1987.

1964, 16, 61-71.

56 Scheinkman, J. and B. Le Baron, "Nonlinear Dynamics and Stock Returns," Department of Economics, University of Chicago, 1986.

57 Shaw, R., "Strange Attractors, Chaotic Behavior, and Information Flow," *Zhurnal Naturforsch*, 1981, 36A, 80.

58 Smale, Steven, "Differentiable Dynamical Systems," *The Bulletin of the American Mathematical Society*, 1967, 74, 747-817.

59 Stefan, P., "A Theorem of Sarkovskii on the Existence of Periodic Orbits of Continuous Endomorphism of the Real Line," *Communications in Mathematical Physics*, 1977, 54, 237-248.

60 Takens, F., "Distinguishing Deterministic and Random Systems." In Rosenblatt, G.G. Iooss, and D. Joseph (eds.), *Nonlinear Dynamics and Tubulence.* Boston: Pitman, 1985, 315-333.

61 Takens, F. 1984. "On the Numerical Determination of the Dimension of an Attractor." Unpublished manuscript.

62 Wolf, A. and J. Swift. 1984. "Progress in Computing Lyapunov Exponents from Experimental Data." In *Statistical Physics and Chaos in Fusion Plasmas*, C.W.Holton, Jr. and L.E.Reichl, Eds. New York: Wiley.

62 Wolf, A., J. Swift, H. Swinney, and J.Vastano. 1984. "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series." Department of Physics, University of Texas at Austin, Austin, TX.

64 Woodford, M., "Imperfect Financial Intermediator and Complex Dynamics." In Barnett, W., J. Geweke and K. Shell, *Chaos, Sunspots, Bubbles and Nonlinearity.* New York: Cambridge University Press, 1987.

1964, 16, 61-71.

⑯ Scheinkman, J. and B. Le Baron, "Nonlinear Dynamics and Stock Returns," Department of Economics, University of Chicago, 1986.

⑰ Shaw, R., "Strange Attractors, Chaotic Behavior, and Information Flow," *Zhurnal Naturforsch*, 1981, 36A, 80.

⑱ Smale, Steven, "Differentiable Dynamical Systems," *The Bulletin of the American Mathematical Society*, 1967, 74, 747-817.

⑲ Stefan, P., "A Theorem of Sarkovskii on the Existence of Periodic Orbits of Continuous Endomorphism of the Real Line," *Communications in Mathematical Physics*, 1977, 54, 237-248.

⑳ Takens, F., "Distinguishing Deterministic and Random Systems." In Rosenblatt, G.G. Iooss, and D. Joseph (eds.), *Nonlinear Dynamics and Tubulence*. Boston: Pitman, 1985, 315-333.

㉑ Takens, F. 1984. "On the Numerical Determination of the Dimension of an Attractor." Unpublished manuscript.

㉒ Wolf, A. and J. Swift. 1984. "Progress in Computing Lyapunov Exponents from Experimental Data." In *Statistical Physics and Chaos in Fusion Plasmas*, C.W.Holton, Jr. and L.E.Reichl, Eds. New York: Wiley.

㉒ Wolf, A., J. Swift, H. Swinney, and J.Vastano. 1984. "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series." Department of Physics, University of Texas at Austin, Austin, TX.

㉔ Woodford, M., "Imperfect Financial Intermediator and Complex Dynamics." In Barnett, W., J. Geweke and K. Shell, *Chaos, Sunspots, Bubbles and Nonlinearity*. New York: Cambridge University Press, 1987.

1964, 16, 61-71.

56 Scheinkman, J. and B. Le Baron, "Nonlinear Dynamics and Stock Returns," Department of Economics, University of Chicago, 1986.

57 Shaw, R., "Strange Attractors, Chaotic Behavior, and Information Flow," *Zhurnal Naturforsch*, 1981, 36A, 80.

58 Smale, Steven, "Differentiable Dynamical Systems," *The Bulletin of the American Mathematical Society*, 1967, 74, 747-817.

59 Stefan, P., "A Theorem of Sarkovskii on the Existence of Periodic Orbits of Continuous Endomorphism of the Real Line," *Communications in Mathematical Physics*, 1977, 54, 237-248.

60 Takens, F., "Distinguishing Deterministic and Random Systems." In Rosenblatt, G.G. Iooss, and D. Joseph (eds.), *Nonlinear Dynamics and Tubulence*. Boston: Pitman, 1985, 315-333.

61 Takens, F. 1984. "On the Numerical Determination of the Dimension of an Attractor." Unpublished manuscript.

62 Wolf, A. and J. Swift. 1984. "Progress in Computing Lyapunov Exponents from Experimental Data." In *Statistical Physics and Chaos in Fusion Plasmas*, C.W.Holton, Jr. and L.E.Reichl, Eds. New York: Wiley.

62 Wolf, A., J. Swift, H. Swinney, and J.Vastano. 1984. "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series." Department of Physics, University of Texas at Austin, Austin, TX.

64 Woodford, M., "Imperfect Financial Intermediator and Complex Dynamics." In Barnett, W., J. Geweke and K. Shell, *Chaos, Sunspots, Bubbles and Nonlinearity*. New York: Cambridge University Press, 1987.

1964, 16, 61-71.

56. Scheinkman, J. and B. Le Baron, "Nonlinear Dynamics and Stock Returns," Department of Economics, University of Chicago, 1986.

57. Shaw, R., "Strange Attractors, Chaotic Behavior, and Information Flow," *Zhurnal Naturforsch*, 1981, 36A, 80.

58. Smale, Steven, "Differentiable Dynamical Systems," *The Bulletin of the American Mathematical Society*, 1967, 74, 747-817.

59. Stefan, P., "A Theorem of Sarkovskii on the Existence of Periodic Orbits of Continuous Endomorphism of the Real Line," *Communications in Mathematical Physics*, 1977, 54, 237-248.

60. Takens, F., "Distinguishing Deterministic and Random Systems." In Rosenblatt, G.G. Iooss, and D. Joseph (eds.), *Nonlinear Dynamics and Tubulence*. Boston: Pitman, 1985, 315-333.

61. Takens, F. 1984. "On the Numerical Determination of the Dimension of an Attractor." Unpublished manuscript.

62. Wolf, A. and J. Swift. 1984. "Progress in Computing Lyapunov Exponents from Experimental Data." In *Statistical Physics and Chaos in Fusion Plasmas*, C.W.Holton, Jr. and L.E.Reichl, Eds. New York: Wiley.

62. Wolf, A., J. Swift, H. Swinney, and J.Vastano. 1984. "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series." Department of Physics, University of Texas at Austin, Austin, TX.

64. Woodford, M., "Imperfect Financial Intermediator and Complex Dynamics." In Barnett, W., J. Geweke and K. Shell, *Chaos, Sunspots, Bubbles and Nonlinearity*. New York: Cambridge University Press, 1987.

1964, 16, 61-71.

⑯ Scheinkman, J. and B. Le Baron, "Nonlinear Dynamics and Stock Returns," Department of Economics, University of Chicago, 1986.

⑰ Shaw, R., "Strange Attractors, Chaotic Behavior, and Information Flow," *Zhurnal Naturforsch*, 1981, 36A, 80.

⑱ Smale, Steven, "Differentiable Dynamical Systems," *The Bulletin of the American Mathematical Society*, 1967, 74, 747-817.

⑲ Stefan, P., "A Theorem of Sarkovskii on the Existence of Periodic Orbits of Continuous Endomorphism of the Real Line," *Communications in Mathematical Physics*, 1977, 54, 237-248.

⑳ Takens, F., "Distinguishing Deterministic and Random Systems." In Rosenblatt, G.G. Iooss, and D. Joseph (eds.), *Nonlinear Dynamics and Tubulence*. Boston: Pitman, 1985, 315-333.

㉑ Takens, F. 1984. "On the Numerical Determination of the Dimension of an Attractor." Unpublished manuscript.

㉒ Wolf, A. and J. Swift. 1984. "Progress in Computing Lyapunov Exponents from Experimental Data." In *Statistical Physics and Chaos in Fusion Plasmas*, C.W.Holton, Jr. and L.E.Reichl, Eds. New York: Wiley.

㉒ Wolf, A., J. Swift, H. Swinney, and J.Vastano. 1984. "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series." Department of Physics, University of Texas at Austin, Austin, TX.

㉔ Woodford, M., "Imperfect Financial Intermediator and Complex Dynamics." In Barnett, W., J. Geweke and K. Shell, *Chaos, Sunspots, Bubbles and Nonlinearity*. New York: Cambridge University Press, 1987.

1964, 16, 61-71.

56 Scheinkman, J. and B. Le Baron, "Nonlinear Dynamics and Stock Returns," Department of Economics, University of Chicago, 1986.

57 Shaw, R., "Strange Attractors, Chaotic Behavior, and Information Flow," *Zhurnal Naturforsch*, 1981, 36A, 80.

58 Smale, Steven, "Differentiable Dynamical Systems," *The Bulletin of the American Mathematical Society*, 1967, 74, 747-817.

59 Stefan, P., "A Theorem of Sarkovskii on the Existence of Periodic Orbits of Continuous Endomorphism of the Real Line," *Communications in Mathematical Physics*, 1977, 54, 237-248.

60 Takens, F., "Distinguishing Deterministic and Random Systems." In Rosenblatt, G.G. Iooss, and D. Joseph (eds.), *Nonlinear Dynamics and Tubulence*. Boston: Pitman, 1985, 315-333.

61 Takens, F. 1984. "On the Numerical Determination of the Dimension of an Attractor." Unpublished manuscript.

62 Wolf, A. and J. Swift. 1984. "Progress in Computing Lyapunov Exponents from Experimental Data." In *Statistical Physics and Chaos in Fusion Plasmas*, C.W.Holton, Jr. and L.E.Reichl, Eds. New York: Wiley.

62 Wolf, A., J. Swift, H. Swinney, and J.Vastano. 1984. "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series." Department of Physics, University of Texas at Austin, Austin, TX.

64 Woodford, M., "Imperfect Financial Intermediator and Complex Dynamics." In Barnett, W., J. Geweke and K. Shell, *Chaos, Sunspots, Bubbles and Nonlinearity*. New York: Cambridge University Press, 1987.

1964, 16, 61-71.

㊻ Scheinkman, J. and B. Le Baron, "Nonlinear Dynamics and Stock Returns," Department of Economics, University of Chicago, 1986.

㊼ Shaw, R., "Strange Attractors, Chaotic Behavior, and Information Flow," *Zhurnal Naturforsch*, 1981, 36A, 80.

㊽ Smale, Steven, "Differentiable Dynamical Systems," *The Bulletin of the American Mathematical Society*, 1967, 74, 747-817.

㊾ Stefan, P., "A Theorem of Sarkovskii on the Existence of Periodic Orbits of Continuous Endomorphism of the Real Line," *Communications in Mathematical Physics*, 1977, 54, 237-248.

㊿ Takens, F., "Distinguishing Deterministic and Random Systems." In Rosenblatt, G.G. Iooss, and D. Joseph (eds.), *Nonlinear Dynamics and Tubulence*. Boston: Pitman, 1985, 315-333.

(61) Takens, F. 1984. "On the Numerical Determination of the Dimension of an Attractor." Unpublished manuscript.

(62) Wolf, A. and J. Swift. 1984. "Progress in Computing Lyapunov Exponents from Experimental Data." In *Statistical Physics and Chaos in Fusion Plasmas*, C.W.Holton, Jr. and L.E.Reichl, Eds. New York: Wiley.

(62) Wolf, A., J. Swift, H. Swinney, and J.Vastano. 1984. "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series." Department of Physics, University of Texas at Austin, Austin, TX.

(64) Woodford, M., "Imperfect Financial Intermediator and Complex Dynamics." In Barnett, W., J. Geweke and K. Shell, *Chaos, Sunspots, Bubbles and Nonlinearity*. New York: Cambridge University Press, 1987.

1964, 16, 61-71.

⑯ Scheinkman, J. and B. Le Baron, "Nonlinear Dynamics and Stock Returns," Department of Economics, University of Chicago, 1986.

⑰ Shaw, R., "Strange Attractors, Chaotic Behavior, and Information Flow," *Zhurnal Naturforsch*, 1981, 36A, 80.

⑱ Smale, Steven, "Differentiable Dynamical Systems," *The Bulletin of the American Mathematical Society*, 1967, 74, 747-817.

⑲ Stefan, P., "A Theorem of Sarkovskii on the Existence of Periodic Orbits of Continuous Endomorphism of the Real Line," *Communications in Mathematical Physics*, 1977, 54, 237-248.

⑳ Takens, F., "Distinguishing Deterministic and Random Systems." In Rosenblatt, G.G. Iooss, and D. Joseph (eds.), *Nonlinear Dynamics and Tubulence*. Boston: Pitman, 1985, 315-333.

㉑ Takens, F. 1984. "On the Numerical Determination of the Dimension of an Attractor." Unpublished manuscript.

㉒ Wolf, A. and J. Swift. 1984. "Progress in Computing Lyapunov Exponents from Experimental Data." In *Statistical Physics and Chaos in Fusion Plasmas*, C.W.Holton, Jr. and L.E.Reichl, Eds. New York: Wiley.

㉒ Wolf, A., J. Swift, H. Swinney, and J.Vastano. 1984. "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series." Department of Physics, University of Texas at Austin, Austin, TX.

㉔ Woodford, M., "Imperfect Financial Intermediator and Complex Dynamics." In Barnett, W., J. Geweke and K. Shell, *Chaos, Sunspots, Bubbles and Nonlinearity*. New York: Cambridge University Press, 1987.

1964, 16, 61-71.

㊻ Scheinkman, J. and B. Le Baron, "Nonlinear Dynamics and Stock Returns," Department of Economics, University of Chicago, 1986.

㊼ Shaw, R., "Strange Attractors, Chaotic Behavior, and Information Flow," *Zhurnal Naturforsch*, 1981, 36A, 80.

㊽ Smale, Steven, "Differentiable Dynamical Systems," *The Bulletin of the American Mathematical Society*, 1967, 74, 747-817.

㊾ Stefan, P., "A Theorem of Sarkovskii on the Existence of Periodic Orbits of Continuous Endomorphism of the Real Line," *Communications in Mathematical Physics*, 1977, 54, 237-248.

㊿ Takens, F., "Distinguishing Deterministic and Random Systems." In Rosenblatt, G.G. Iooss, and D. Joseph (eds.), *Nonlinear Dynamics and Tubulence*. Boston: Pitman, 1985, 315-333.

61 Takens, F. 1984. "On the Numerical Determination of the Dimension of an Attractor." Unpublished manuscript.

62 Wolf, A. and J. Swift. 1984. "Progress in Computing Lyapunov Exponents from Experimental Data." In *Statistical Physics and Chaos in Fusion Plasmas*, C.W.Holton, Jr. and L.E.Reichl, Eds. New York: Wiley.

62 Wolf, A., J. Swift, H. Swinney, and J.Vastano. 1984. "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series." Department of Physics, University of Texas at Austin, Austin, TX.

64 Woodford, M., "Imperfect Financial Intermediator and Complex Dynamics." In Barnett, W., J. Geweke and K. Shell, *Chaos, Sunspots, Bubbles and Nonlinearity*. New York: Cambridge University Press, 1987.

1964, 16, 61-71.
⑯ Scheinkman, J. and B. Le Baron, "Nonlinear Dynamics and Stock Returns," Department of Economics, University of Chicago, 1986.
⑰ Shaw, R., "Strange Attractors, Chaotic Behavior, and Information Flow," *Zhurnal Naturforsch*, 1981, 36A, 80.
⑱ Smale, Steven, "Differentiable Dynamical Systems," *The Bulletin of the American Mathematical Society*, 1967, 74, 747-817.
⑲ Stefan, P., "A Theorem of Sarkovskii on the Existence of Periodic Orbits of Continuous Endomorphism of the Real Line," *Communications in Mathematical Physics*, 1977, 54, 237-248.
⑳ Takens, F., "Distinguishing Deterministic and Random Systems." In Rosenblatt, G.G. Iooss, and D. Joseph (eds.), *Nonlinear Dynamics and Tubulence*. Boston: Pitman, 1985, 315-333.
㉑ Takens, F. 1984. "On the Numerical Determination of the Dimension of an Attractor." Unpublished manuscript.
㉒ Wolf, A. and J. Swift. 1984. "Progress in Computing Lyapunov Exponents from Experimental Data." In *Statistical Physics and Chaos in Fusion Plasmas*, C.W.Holton, Jr. and L.E.Reichl, Eds. New York: Wiley.
㉒ Wolf, A., J. Swift, H. Swinney, and J.Vastano. 1984. "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series." Department of Physics, University of Texas at Austin, Austin, TX.
㉔ Woodford, M., "Imperfect Financial Intermediator and Complex Dynamics." In Barnett, W., J. Geweke and K. Shell, *Chaos, Sunspots, Bubbles and Nonlinearity*. New York: Cambridge University Press, 1987.

1964, 16, 61-71.

56 Scheinkman, J. and B. Le Baron, "Nonlinear Dynamics and Stock Returns," Department of Economics, University of Chicago, 1986.

57 Shaw, R., "Strange Attractors, Chaotic Behavior, and Information Flow," *Zhurnal Naturforsch*, 1981, 36A, 80.

58 Smale, Steven, "Differentiable Dynamical Systems," *The Bulletin of the American Mathematical Society*, 1967, 74, 747-817.

59 Stefan, P., "A Theorem of Sarkovskii on the Existence of Periodic Orbits of Continuous Endomorphism of the Real Line," *Communications in Mathematical Physics*, 1977, 54, 237-248.

60 Takens, F., "Distinguishing Deterministic and Random Systems." In Rosenblatt, G.G. Iooss, and D. Joseph (eds.), *Nonlinear Dynamics and Tubulence.* Boston: Pitman, 1985, 315-333.

61 Takens, F. 1984. "On the Numerical Determination of the Dimension of an Attractor." Unpublished manuscript.

62 Wolf, A. and J. Swift. 1984. "Progress in Computing Lyapunov Exponents from Experimental Data." In *Statistical Physics and Chaos in Fusion Plasmas*, C.W.Holton, Jr. and L.E.Reichl, Eds. New York: Wiley.

62 Wolf, A., J. Swift, H. Swinney, and J.Vastano. 1984. "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series." Department of Physics, University of Texas at Austin, Austin, TX.

64 Woodford, M., "Imperfect Financial Intermediator and Complex Dynamics." In Barnett, W., J. Geweke and K. Shell, *Chaos, Sunspots, Bubbles and Nonlinearity.* New York: Cambridge University Press, 1987.

1964, 16, 61-71.

56. Scheinkman, J. and B. Le Baron, "Nonlinear Dynamics and Stock Returns," Department of Economics, University of Chicago, 1986.

57. Shaw, R., "Strange Attractors, Chaotic Behavior, and Information Flow," *Zhurnal Naturforsch*, 1981, 36A, 80.

58. Smale, Steven, "Differentiable Dynamical Systems," *The Bulletin of the American Mathematical Society*, 1967, 74, 747-817.

59. Stefan, P., "A Theorem of Sarkovskii on the Existence of Periodic Orbits of Continuous Endomorphism of the Real Line," *Communications in Mathematical Physics*, 1977, 54, 237-248.

60. Takens, F., "Distinguishing Deterministic and Random Systems." In Rosenblatt, G.G. Iooss, and D. Joseph (eds.), *Nonlinear Dynamics and Tubulence*. Boston: Pitman, 1985, 315-333.

61. Takens, F. 1984. "On the Numerical Determination of the Dimension of an Attractor." Unpublished manuscript.

62. Wolf, A. and J. Swift. 1984. "Progress in Computing Lyapunov Exponents from Experimental Data." In *Statistical Physics and Chaos in Fusion Plasmas*, C.W.Holton, Jr. and L.E.Reichl, Eds. New York: Wiley.

62. Wolf, A., J. Swift, H. Swinney, and J.Vastano. 1984. "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series." Department of Physics, University of Texas at Austin, Austin, TX.

64. Woodford, M., "Imperfect Financial Intermediator and Complex Dynamics." In Barnett, W., J. Geweke and K. Shell, *Chaos, Sunspots, Bubbles and Nonlinearity*. New York: Cambridge University Press, 1987.

1964, 16, 61-71.

㊻ Scheinkman, J. and B. Le Baron, "Nonlinear Dynamics and Stock Returns," Department of Economics, University of Chicago, 1986.

㊼ Shaw, R., "Strange Attractors, Chaotic Behavior, and Information Flow," *Zhurnal Naturforsch*, 1981, 36A, 80.

㊽ Smale, Steven, "Differentiable Dynamical Systems," *The Bulletin of the American Mathematical Society*, 1967, 74, 747-817.

㊾ Stefan, P., "A Theorem of Sarkovskii on the Existence of Periodic Orbits of Continuous Endomorphism of the Real Line," *Communications in Mathematical Physics*, 1977, 54, 237-248.

㊿ Takens, F., "Distinguishing Deterministic and Random Systems." In Rosenblatt, G.G. Iooss, and D. Joseph (eds.), *Nonlinear Dynamics and Tubulence*. Boston: Pitman, 1985, 315-333.

(61) Takens, F. 1984. "On the Numerical Determination of the Dimension of an Attractor." Unpublished manuscript.

(62) Wolf, A. and J. Swift. 1984. "Progress in Computing Lyapunov Exponents from Experimental Data." In *Statistical Physics and Chaos in Fusion Plasmas*, C.W.Holton, Jr. and L.E.Reichl, Eds. New York: Wiley.

(62) Wolf, A., J. Swift, H. Swinney, and J.Vastano. 1984. "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series." Department of Physics, University of Texas at Austin, Austin, TX.

(64) Woodford, M., "Imperfect Financial Intermediator and Complex Dynamics." In Barnett, W., J. Geweke and K. Shell, *Chaos, Sunspots, Bubbles and Nonlinearity*. New York: Cambridge University Press, 1987.

1964, 16, 61-71.

⑯ Scheinkman, J. and B. Le Baron, "Nonlinear Dynamics and Stock Returns," Department of Economics, University of Chicago, 1986.

⑰ Shaw, R., "Strange Attractors, Chaotic Behavior, and Information Flow," *Zhurnal Naturforsch*, 1981, 36A, 80.

⑱ Smale, Steven, "Differentiable Dynamical Systems," *The Bulletin of the American Mathematical Society*, 1967, 74, 747-817.

⑲ Stefan, P., "A Theorem of Sarkovskii on the Existence of Periodic Orbits of Continuous Endomorphism of the Real Line," *Communications in Mathematical Physics*, 1977, 54, 237-248.

⑳ Takens, F., "Distinguishing Deterministic and Random Systems." In Rosenblatt, G.G. Iooss, and D. Joseph (eds.), *Nonlinear Dynamics and Tubulence*. Boston: Pitman, 1985, 315-333.

㉑ Takens, F. 1984. "On the Numerical Determination of the Dimension of an Attractor." Unpublished manuscript.

㉒ Wolf, A. and J. Swift. 1984. "Progress in Computing Lyapunov Exponents from Experimental Data." In *Statistical Physics and Chaos in Fusion Plasmas*, C.W.Holton, Jr. and L.E.Reichl, Eds. New York: Wiley.

㉒ Wolf, A., J. Swift, H. Swinney, and J.Vastano. 1984. "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series." Department of Physics, University of Texas at Austin, Austin, TX.

㉔ Woodford, M., "Imperfect Financial Intermediator and Complex Dynamics." In Barnett, W., J. Geweke and K. Shell, *Chaos, Sunspots, Bubbles and Nonlinearity*. New York: Cambridge University Press, 1987.

1964, 16, 61-71.

㊻ Scheinkman, J. and B. Le Baron, "Nonlinear Dynamics and Stock Returns," Department of Economics, University of Chicago, 1986.

㊼ Shaw, R., "Strange Attractors, Chaotic Behavior, and Information Flow," *Zhurnal Naturforsch*, 1981, 36A, 80.

㊽ Smale, Steven, "Differentiable Dynamical Systems," *The Bulletin of the American Mathematical Society*, 1967, 74, 747-817.

㊾ Stefan, P., "A Theorem of Sarkovskii on the Existence of Periodic Orbits of Continuous Endomorphism of the Real Line," *Communications in Mathematical Physics*, 1977, 54, 237-248.

㊿ Takens, F., "Distinguishing Deterministic and Random Systems." In Rosenblatt, G.G. Iooss, and D. Joseph (eds.), *Nonlinear Dynamics and Tubulence*. Boston: Pitman, 1985, 315-333.

61 Takens, F. 1984. "On the Numerical Determination of the Dimension of an Attractor." Unpublished manuscript.

62 Wolf, A. and J. Swift. 1984. "Progress in Computing Lyapunov Exponents from Experimental Data." In *Statistical Physics and Chaos in Fusion Plasmas*, C.W.Holton, Jr. and L.E.Reichl, Eds. New York: Wiley.

62 Wolf, A., J. Swift, H. Swinney, and J.Vastano. 1984. "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series." Department of Physics, University of Texas at Austin, Austin, TX.

64 Woodford, M., "Imperfect Financial Intermediator and Complex Dynamics." In Barnett, W., J. Geweke and K. Shell, *Chaos, Sunspots, Bubbles and Nonlinearity*. New York: Cambridge University Press, 1987.

1964, 16, 61-71.

⑯ Scheinkman, J. and B. Le Baron, "Nonlinear Dynamics and Stock Returns," Department of Economics, University of Chicago, 1986.

⑰ Shaw, R., "Strange Attractors, Chaotic Behavior, and Information Flow," *Zhurnal Naturforsch*, 1981, 36A, 80.

⑱ Smale, Steven, "Differentiable Dynamical Systems," *The Bulletin of the American Mathematical Society*, 1967, 74, 747-817.

⑲ Stefan, P., "A Theorem of Sarkovskii on the Existence of Periodic Orbits of Continuous Endomorphism of the Real Line," *Communications in Mathematical Physics*, 1977, 54, 237-248.

⑳ Takens, F., "Distinguishing Deterministic and Random Systems." In Rosenblatt, G.G. Iooss, and D. Joseph (eds.), *Nonlinear Dynamics and Tubulence*. Boston: Pitman, 1985, 315-333.

㉑ Takens, F. 1984. "On the Numerical Determination of the Dimension of an Attractor." Unpublished manuscript.

㉒ Wolf, A. and J. Swift. 1984. "Progress in Computing Lyapunov Exponents from Experimental Data." In *Statistical Physics and Chaos in Fusion Plasmas*, C.W.Holton, Jr. and L.E.Reichl, Eds. New York: Wiley.

㉒ Wolf, A., J. Swift, H. Swinney, and J.Vastano. 1984. "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series." Department of Physics, University of Texas at Austin, Austin, TX.

㉔ Woodford, M., "Imperfect Financial Intermediator and Complex Dynamics." In Barnett, W., J. Geweke and K. Shell, *Chaos, Sunspots, Bubbles and Nonlinearity*. New York: Cambridge University Press, 1987.

1964, 16, 61-71.

⑯ Scheinkman, J. and B. Le Baron, "Nonlinear Dynamics and Stock Returns," Department of Economics, University of Chicago, 1986.

⑰ Shaw, R., "Strange Attractors, Chaotic Behavior, and Information Flow," *Zhurnal Naturforsch*, 1981, 36A, 80.

⑱ Smale, Steven, "Differentiable Dynamical Systems," *The Bulletin of the American Mathematical Society*, 1967, 74, 747-817.

⑲ Stefan, P., "A Theorem of Sarkovskii on the Existence of Periodic Orbits of Continuous Endomorphism of the Real Line," *Communications in Mathematical Physics*, 1977, 54, 237-248.

⑳ Takens, F., "Distinguishing Deterministic and Random Systems." In Rosenblatt, G.G. Iooss, and D. Joseph (eds.), *Nonlinear Dynamics and Tubulence*. Boston: Pitman, 1985, 315-333.

㉑ Takens, F. 1984. "On the Numerical Determination of the Dimension of an Attractor." Unpublished manuscript.

㉒ Wolf, A. and J. Swift. 1984. "Progress in Computing Lyapunov Exponents from Experimental Data." In *Statistical Physics and Chaos in Fusion Plasmas*, C.W.Holton, Jr. and L.E.Reichl, Eds. New York: Wiley.

㉒ Wolf, A., J. Swift, H. Swinney, and J.Vastano. 1984. "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series." Department of Physics, University of Texas at Austin, Austin, TX.

㉔ Woodford, M., "Imperfect Financial Intermediator and Complex Dynamics." In Barnett, W., J. Geweke and K. Shell, *Chaos, Sunspots, Bubbles and Nonlinearity*. New York: Cambridge University Press, 1987.

1964, 16, 61-71.

56 Scheinkman, J. and B. Le Baron, "Nonlinear Dynamics and Stock Returns," Department of Economics, University of Chicago, 1986.

57 Shaw, R., "Strange Attractors, Chaotic Behavior, and Information Flow," *Zhurnal Naturforsch*, 1981, 36A, 80.

58 Smale, Steven, "Differentiable Dynamical Systems," *The Bulletin of the American Mathematical Society*, 1967, 74, 747-817.

59 Stefan, P., "A Theorem of Sarkovskii on the Existence of Periodic Orbits of Continuous Endomorphism of the Real Line," *Communications in Mathematical Physics*, 1977, 54, 237-248.

60 Takens, F., "Distinguishing Deterministic and Random Systems." In Rosenblatt, G.G. Iooss, and D. Joseph (eds.), *Nonlinear Dynamics and Tubulence*. Boston: Pitman, 1985, 315-333.

61 Takens, F. 1984. "On the Numerical Determination of the Dimension of an Attractor." Unpublished manuscript.

62 Wolf, A. and J. Swift. 1984. "Progress in Computing Lyapunov Exponents from Experimental Data." In *Statistical Physics and Chaos in Fusion Plasmas*, C.W.Holton, Jr. and L.E.Reichl, Eds. New York: Wiley.

62 Wolf, A., J. Swift, H. Swinney, and J.Vastano. 1984. "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series." Department of Physics, University of Texas at Austin, Austin, TX.

64 Woodford, M., "Imperfect Financial Intermediator and Complex Dynamics." In Barnett, W., J. Geweke and K. Shell, *Chaos, Sunspots, Bubbles and Nonlinearity*. New York: Cambridge University Press, 1987.

1964, 16, 61-71.

⑯ Scheinkman, J. and B. Le Baron, "Nonlinear Dynamics and Stock Returns," Department of Economics, University of Chicago, 1986.

⑰ Shaw, R., "Strange Attractors, Chaotic Behavior, and Information Flow," *Zhurnal Naturforsch*, 1981, 36A, 80.

⑱ Smale, Steven, "Differentiable Dynamical Systems," *The Bulletin of the American Mathematical Society*, 1967, 74, 747-817.

⑲ Stefan, P., "A Theorem of Sarkovskii on the Existence of Periodic Orbits of Continuous Endomorphism of the Real Line," *Communications in Mathematical Physics*, 1977, 54, 237-248.

⑳ Takens, F., "Distinguishing Deterministic and Random Systems." In Rosenblatt, G.G. Iooss, and D. Joseph (eds.), *Nonlinear Dynamics and Tubulence*. Boston: Pitman, 1985, 315-333.

㉑ Takens, F. 1984. "On the Numerical Determination of the Dimension of an Attractor." Unpublished manuscript.

㉒ Wolf, A. and J. Swift. 1984. "Progress in Computing Lyapunov Exponents from Experimental Data." In *Statistical Physics and Chaos in Fusion Plasmas*, C.W.Holton, Jr. and L.E.Reichl, Eds. New York: Wiley.

㉒ Wolf, A., J. Swift, H. Swinney, and J.Vastano. 1984. "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series." Department of Physics, University of Texas at Austin, Austin, TX.

㉔ Woodford, M., "Imperfect Financial Intermediator and Complex Dynamics." In Barnett, W., J. Geweke and K. Shell, *Chaos, Sunspots, Bubbles and Nonlinearity*. New York: Cambridge University Press, 1987.

1964, 16, 61-71.

⑯ Scheinkman, J. and B. Le Baron, "Nonlinear Dynamics and Stock Returns," Department of Economics, University of Chicago, 1986.

⑰ Shaw, R., "Strange Attractors, Chaotic Behavior, and Information Flow," *Zhurnal Naturforsch*, 1981, 36A, 80.

⑱ Smale, Steven, "Differentiable Dynamical Systems," *The Bulletin of the American Mathematical Society*, 1967, 74, 747-817.

⑲ Stefan, P., "A Theorem of Sarkovskii on the Existence of Periodic Orbits of Continuous Endomorphism of the Real Line," *Communications in Mathematical Physics*, 1977, 54, 237-248.

⑳ Takens, F., "Distinguishing Deterministic and Random Systems." In Rosenblatt, G.G. Iooss, and D. Joseph (eds.), *Nonlinear Dynamics and Tubulence.* Boston: Pitman, 1985, 315-333.

㉑ Takens, F. 1984. "On the Numerical Determination of the Dimension of an Attractor." Unpublished manuscript.

㉒ Wolf, A. and J. Swift. 1984. "Progress in Computing Lyapunov Exponents from Experimental Data." In *Statistical Physics and Chaos in Fusion Plasmas*, C.W.Holton, Jr. and L.E.Reichl, Eds. New York: Wiley.

㉒ Wolf, A., J. Swift, H. Swinney, and J.Vastano. 1984. "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series." Department of Physics, University of Texas at Austin, Austin, TX.

㉔ Woodford, M., "Imperfect Financial Intermediator and Complex Dynamics." In Barnett, W., J. Geweke and K. Shell, *Chaos, Sunspots, Bubbles and Nonlinearity.* New York: Cambridge University Press, 1987.